

2) (Peso = 3,0) Prove por indução que:

a) $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$, para todo inteiro positivo n .

Base indutiva: $P(1)$: $5 = \frac{5 \cdot 1(1+1)}{2} = 5$ ok!

Hipótese: $P(k)$: $5 + 10 + 15 + \dots + 5k = \frac{5k(k+1)}{2}$

Passo indutivo: $P(k+1)$: $5 + 10 + 15 + \dots + 5(k+1) = \frac{5(k+1)(k+2)}{2}$?

Demonstração:

$$\underbrace{5 + 10 + 15 + \dots + 5k}_{P(k)} + 5(k+1)$$

$$\frac{5k(k+1)}{2} + 5(k+1)$$

$$\frac{5k(k+1) + 10(k+1)}{2}$$

$$\frac{5(k+1)(k+2)}{2}$$



4) (Peso = 2,0) Calcule o máximo divisor comum entre 1846 e 888 utilizando o algoritmo de Euclides.

$$\begin{aligned}
 \text{mdc}(1846, 888) &= 1846 \bmod 888 = 70 \\
 &= \text{mdc}(888, 70) & 888 \bmod 70 &= 48 \\
 &= \text{mdc}(70, 48) & 70 \bmod 48 &= 22 \\
 &= \text{mdc}(48, 22) & 48 \bmod 22 &= 4 \\
 &= \text{mdc}(22, 4) & 22 \bmod 4 &= 2 \\
 &= \text{mdc}(4, 2) & 4 \bmod 2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{mdc}(1846, 888) = 2 //$$

5) (Peso = 2,0) Um conjunto de 4 moedas é selecionado de uma caixa contendo 5 moedas de dez centavos e 7 moedas de vinte e cinco centavos.

a) De quantas maneiras podemos escolher as 4 moedas?

$$C(12, 4) = \frac{12!}{4! (12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{4! \cdot \cancel{8!}} = 495 \text{ maneiras}$$

Considerarei também quem fez $P(12, 4)$.

b) Encontre o número de conjuntos nos quais 2 das moedas são de dez centavos e 2 são de vinte e cinco centavos.

$$\begin{aligned}
 C(5, 2) \cdot C(7, 2) &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} \\
 &= \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2! \cdot \cancel{5!}} = 210 \text{ maneiras}
 \end{aligned}$$

c) Encontre o número de conjuntos com 3 ou mais moedas de vinte e cinco centavos.

$$3 \text{ moedas de 25 centavos: } C(7, 3) \cdot C(5, 1) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 175$$

$$4 \text{ moedas de 25 centavos: } C(7, 4) \cdot C(5, 0) = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{0! \cdot 5!} = 35$$

$$C(7, 3) \cdot C(5, 1) + C(7, 4) \cdot C(5, 0) = 210 //$$

Avaliação 3

Nome: _____ Data: 14/06/2016

Responda todas as questões com o máximo de clareza possível.

- 1) (Peso=2,0) O jogo "Torre de Hanói" tem a seguinte relação de recorrência

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1, \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

Utilize o método "expandir, conjecturar e verificar" para encontrar uma solução fechada que dê o número de movimentações necessárias para completar o jogo com n discos. Além disso, qual o número de movimentações necessárias para 7 discos?

Expandir:

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1 \quad 1^{\text{a}} \text{ expansão}$$

$$T(n) = 2 \cdot (2T(n-2) + 1) + 1 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} T(n-2) + 2 + 1 \quad 2^{\text{a}} \text{ expansão}$$

$$T(n) = 2^2 (2T(n-3) + 1) + 1 = 2^3 T(n-3) + \underbrace{2^2 + 2 + 1}_{2^3 - 1} \quad 3^{\text{a}} \text{ expansão}$$

$$= 2^3 T(n-3) + 2^3 - 1$$

$$\vdots$$

$$T(n) = 2^K T(n-K) + 2^K - 1 \quad K^{\text{a}} \text{ última expansão}$$

$$\begin{aligned} \vdots \\ T(n) &= 2^{n-1} T(n-(n-1)) + 2^{n-1} - 1 \quad (n-1)^{\text{a}} \text{ expansão} \\ &= 2^{n-1} T(1) + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1 \quad \text{solução fechada!} \end{aligned}$$

Conjectura: $T(n) = 2^n - 1$ para $n \geq 1$

Verificação: Base indutiva: $T(1) = 1 = 2^1 - 1 = 1$ OK!

Hipótese: $T(K) = 2^K - 1$ para $K \geq 1$

Passo indutivo: $T(K+1) = 2^{K+1} - 1$?

Da relação de recorrência:

$$\begin{aligned} T(K+1) &= 2T(K) + 1, \text{ da hipótese} \\ &= 2(2^K - 1) + 1 \\ &= 2^{K+1} - 1 \end{aligned}$$

Sabendo que $T(n) = 2^n - 1$, o número de movimentações necessárias para 7 discos é dado por:

$$T(7) = 2^7 - 1 = 127$$

127 movimentações.



b) Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 3$, é válido $2^n < n!$

Base indutiva: $P(4)$: $2^4 < 4!$
 $16 < 24$ ok!

Hipótese: $P(k)$: $2^k < k!$, para $k > 3$

Passo indutivo: $P(k+1)$: $2^{k+1} < (k+1)!$?

Da hipótese temos que $2^k < k!$

Multiplica por $(k+1)$: $2^k \cdot (k+1) < k! \cdot (k+1)$
 $2^k \cdot k + 2^k < (k+1)!$

Perceba que $k > 3$, então $2^k \cdot 1 + 2^k < 2^k \cdot k + 2^k$, então

$$2^k + 2^k < 2^k \cdot k + 2^k < (k+1)!$$

Mas $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, então

$$\underline{2^{k+1}} < 2^k \cdot k + 2^k < \underline{(k+1)!}$$

Ou seja,

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

3) (Peso = 1,0) Quantas permutações distintas existem das letras da palavra FRIGIDEIRA?

$$\frac{10!}{2! \cdot 3!} = 302.400 \text{ permutações distintas}$$