Curso: Ciência da Computação
Disciplina: Matemática Discreta

RELAÇÕES

Prof.: Marcelo Maraschin de Souza
marcelo.maraschin@ifsc.edu.br

Definição e propriedades

Considere o conjunto S={1,2,3}, descreva o conjunto dos pares ordenados S x S.

Quais seriam os elementos se tivéssemos interessados na relação de igualdade entre eles? Ou seja, os pares ordenados cujas componentes são iguais.

Quais seriam os elementos se tivéssemos interessados na relação de um número ser menor do que o outro?

Definição e propriedades

Definição 1(Relação): Uma *relação* é um conjunto de pares ordenados.

Exemplo: R = { (1,3), (2,4), (1,0) }

Definição 2 (Relação entre conjuntos): Seja R uma relação e sejam A e B conjuntos. Dizemos que R é uma *relação sobre* A desde que $R \subseteq A \times A$ e R é uma *relação de* A em (para) B se $R \subseteq A \times B$.

Exemplo: Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { 3, 4, 5, 6} temos as relações:

1) R = { (1,3), (2,3), (1,1) } é sobre A;
2) S = { (3,3), (3,4), (4,6) } é sobre B;
3) T = { (1,3), (1,4), (2,6) } é de A em B.

Definição e propriedades

Uma relação de *A* em *B* é um subconjunto *R* de pares ordenados onde:

- o primeiro elemento do par vem de *A;*
- o segundo elemento do par vem de *B.*

Usamos xRy para indicar (x, y) ∈ R. Dessa forma, temos que x está **relacionado** com y por *R.*

Formalmente, $\boxed{xRy \Leftrightarrow ((x,y) \in R)}$

OBS.: Alguns autores definem a relação aqui discutida como relação binária, porque ela relaciona elementos de dois conjuntos. Se forem mais de 2 conjuntos temos uma relação n-ária.

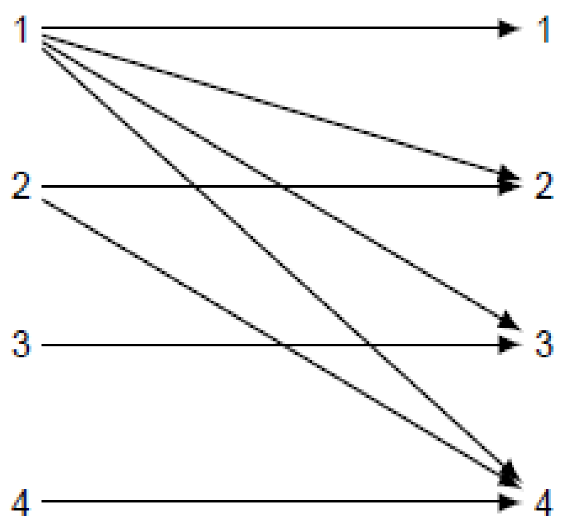
Definição e propriedades

Ex.1: Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$

$R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ é uma relação de A para B

Ex.2: Seja A = {1, 2, 3, 4}

Representação Gráfica e Tabular



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Definição e propriedades

Normalmente uma relação R entre dois conjuntos ou num mesmo conjunto, é expresso por uma propriedade.

Exemplo 2: Seja o conjunto A = { 1, 2, 3, 4}.

a) Construa a relação R = { (a,b) | a dividido por b é um número inteiro} .

b) Construa a representação gráfica e tabular.

Definição e propriedades

Exemplo 3:

Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em $\mathbb{N}$, decida quais entre os pares ordenados dados pertencem à R:

(a) $xRy = \{(x, y) \mid x = y + 1\}$. Pares $(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)$.

(b) $xRy = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$. Pares $(2, 4), (2, 5), (2, 6)$.

(c) $xRy = \{(x, y) \mid x \text{ é ímpar}\}$. Pares $(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$.

(d) $xRy = \{(x, y) \mid x > y^2\}$. Pares $(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)$.

Definição e propriedades

Definição (Relação inversa): Seja R uma relação. A *inversa* de R, denotada por R^{-1}, é a relação formada invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em R.

Exemplo: Seja R = { (1,3), (2,4), (3,6)}

Então R^{-1} = { (3,1), (4,2), (6,3)}

OBS.: Se R é uma relação sobre A, então R^{-1} também o é. Se R é uma relação de A em B, então R^{-1} é uma relação de B em A.

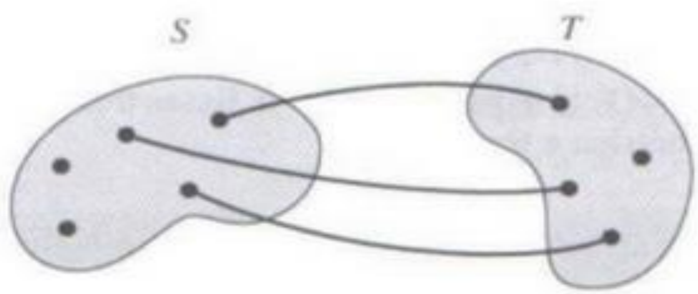
Exercício: Dados A = {4, 5, 6} e B = {0, 1, 2, 3, 4}. Construa uma relação e sua inversa:

a) de A em B b) sobre B.

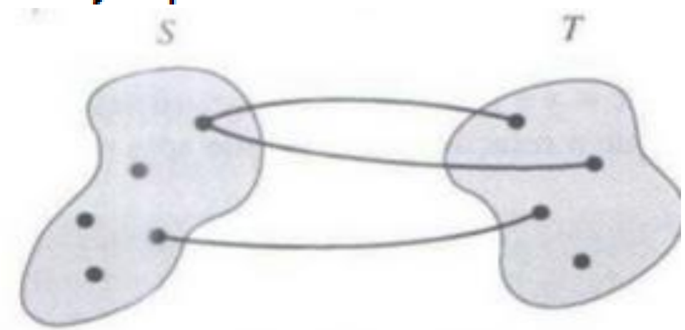
Definição e propriedades

Uma relação *xRy* pode ser classificada em:

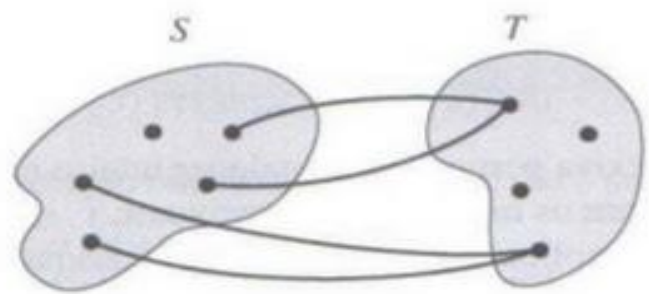
- **um pra um**: componentes *x* e *y* aparecem apenas uma vez em *R*
- **um para muitos**: componente *x* aparece em mais de um par
- **muitos para um**: componente *y* aparece em mais de um par
- **muitos para muitos**: componente *x* e *y* aparecem em mais de um par



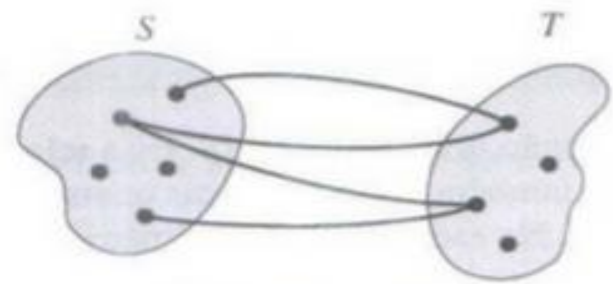
Um para um



Um para muitos



Muitos para um



Muitos para muitos

Definição e propriedades

Exercício: Sobre as seguintes relações, identifique quais são do tipo "um para um", "um para muitos", "muitos para um" ou "muitos para muitos".

(a) $R = \{(5,2),(7,5),(9,2)\}$

(b) $R = \{(2,5),(5,7),(7,2)\}$

(c) $R = \{(7,9),(2,5),(9,9),(2,7)\}$

Definição e propriedades

Quantas relações existem em um conjunto A com n elementos?

- Quantos elementos tem o produto cartesiano $A \times A$?
- $|A \times A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = n^2$
- Um conjunto qualquer com m elementos possui 2^m subconjuntos
- Uma relação R em A é um subconjunto de $A \times A$
- Logo, existe uma relação em $A \times A$ para cada subconjunto de $A \times A$
- Como $A \times A$ possui n^2 elementos, existem $2^{(n^2)}$ relações em $A \times A$.

Exemplo: Seja A = {1,2}. Determine todas as relações de AxA.

Definição e propriedades

Seja R uma relação definida em um conjunto A. Para R, definimos as seguintes **propriedades**:

- Reflexiva;
-
- Simétrica;
-
- Anti-simétrica;
-
- Transitiva.
-
- Vejamos cada uma delas a seguir:

Definição e propriedades

Propriedade Reflexiva: Uma relação R em um conjunto A é chamada de **reflexiva** se (x, x) ∈ R para todo elemento x ∈ A.

Todo x está relacionado a sí mesmo

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são reflexivas?

Definição e propriedades

Propriedade Simétrica: Uma relação R em um conjunto A é chamada de **simétrica** se (y, x) ∈ R sempre que (x, y) ∈ R.

Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x.

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4)(4,1),(4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são simétricas?

Definição e propriedades

Propriedade Antissimétrica: Uma relação R em um conjunto A é chamada **antissimétrica** se, para quaisquer x, y ∈ A, se (x, y) ∈ R e (y, x) ∈ R, então x = y.

Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$.

Ex.:

Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são anti-simétricas?

Definição e propriedades

A relação $R=\{(1,3),(3,1),(2,3)\}$ é simétrica ou antissimétrica?

A relação $R=\{(1,1),(2,2)\}$ é simétrica ou antissimétrica?

Definição e propriedades

Propriedade Transitiva: Uma relação R em um conjunto A é chamada **transitiva** se, sempre que (x, y) ∈ R e (y, z) ∈ R, então (x, z) ∈ R, x, y, z ∈ A.

Se x está relacionado a y, e y está relacionado a z, então x está relacionado a z.

Ex.: Sejam as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4)(4,1), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_6 = \{(3,4)\}$

Quais relações são transitivas?

Definição e propriedades

Resumo das propriedades

Propriedade	Lógica	Linguagem Natural
Reflexiva	$\forall x \in A((x,x) \in R)$	Todo x está relacionado a sí mesmo
Simétrica	$\forall x \forall y\ ((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R)$	Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x
Anti-Simétrica	$\forall x \forall y\ ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow (x = y))$	Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$
Transitiva	$\forall x \forall y \forall z (((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R)))$	Se x está relacionado a y, e y está relacionado a z, então x está relacionado a z

Definição e propriedades

Exemplos

1) Sejam A = {a, b, c, d} e R = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (d,d)} .Verifique se R é:

   a) Reflexiva;

   b) Simétrica;

   c) Antissimétrica;

   d) Transitiva;

2) Uma relação pode ser simétrica, reflexiva e transitiva ao mesmo tempo? De exemplos.

Definição e propriedades

Exemplos

3) Verifique se as relações são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas:

a) $R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$
b) $R_2 = \{(a,b) | a > b\}$
c) $R_3 = \{(a,b) | a = b\}$
d) $R_4 = \{(a,b) | a = b + 1\}$
e) $R_5 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$

Definição e propriedades

Representação de Relações com grafos

Definição (grafo direcionado): um grafo direcionado ou dígrafo consiste em um conjunto V de vértices e um conjunto E de pares ordenados de elementos de V (arestas).

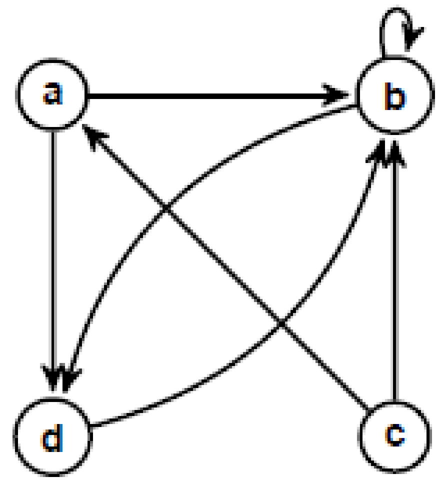
Uma relação R sobre A é ilustrada por um grafo quando:

- Cada elemento de A é representado por um vértice do grafo.
- Cada par ordenado de R é representado por uma aresta direcionada.

Definição e propriedades

Exemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$.



Exercício: represente usando grafos a seguinte relação R={(1,3),(1,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(2,4),(4,3)} sobre A, sabendo que o conjunto A é dado por A={1,2,3,4,5}.

Fecho

- Assuma que R é uma relação binária sobre um conjunto A
- Assuma que R **não possui uma dada propriedade** P
- Podemos 'estender' R para obter uma nova relação R^* que contenha P
  - R^* **conterá os pares** de R: $R \subseteq R^*$
  - R^* **conterá pares adicionais**
  - Tais pares adicionais fazem com que a propriedade P seja válida
  - R^* é o **menor conjunto** com tal propriedade
  - Se existir uma relação S que contém R e possui P, então $R^* \subseteq S$

- Denominamos a relação R^* de **fecho** de R

Fecho

Definição (Fecho de uma Relação)

Seja A um conjunto, R uma relação binária em A e P uma propriedade.
O **fecho** *de R é uma relação binária R^* em A que possui a propriedade P e satisfaz:*

1. *R^* tem a propriedade P*
2. *$R \subseteq R^*$*
3. *Se S é uma relação qualquer que contém R e satisfaz P, então $R^* \subseteq S$*

Tipos de fechos:

- Reflexivo
- Simétrico
- Transitivo

Se uma relação R já possui uma propriedade, então ela é o seu próprio fecho em relação a mesma propriedade.

Fecho Reflexivo

Definição (Fecho Reflexivo)

*O **fecho reflexivo** R^* de uma relação binária R em A é*

$$R^* = R \cup \{(x,x) \mid x \in A\}$$

- Seja $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3)\}$
- R não possui a **propriedade reflexiva**
- **Fecho Reflexivo**: $R^* = R \cup \{(x,x) \mid x \in A\}$

$$R^* = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),\boxed{(2,2)},(2,3),\boxed{(3,3)}\}$$

- R^* é uma relação reflexiva e $R \subseteq R^*$.

Fecho Simétrico

Definição (Fecho Simétrico)

*O **fecho simétrico** R^* de uma relação binária R em A é*

$$R^* = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- R não possui a **propriedade simétrica**
- **Fecho Simétrico**: $R^* = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R\}$

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), \boxed{(2,1)}, (1, 3), (3, 1), (2, 3), \boxed{(3,2)}\}$$

- R^* é uma relação simétrica e $R \subseteq R^*$.

Fecho Transitivo

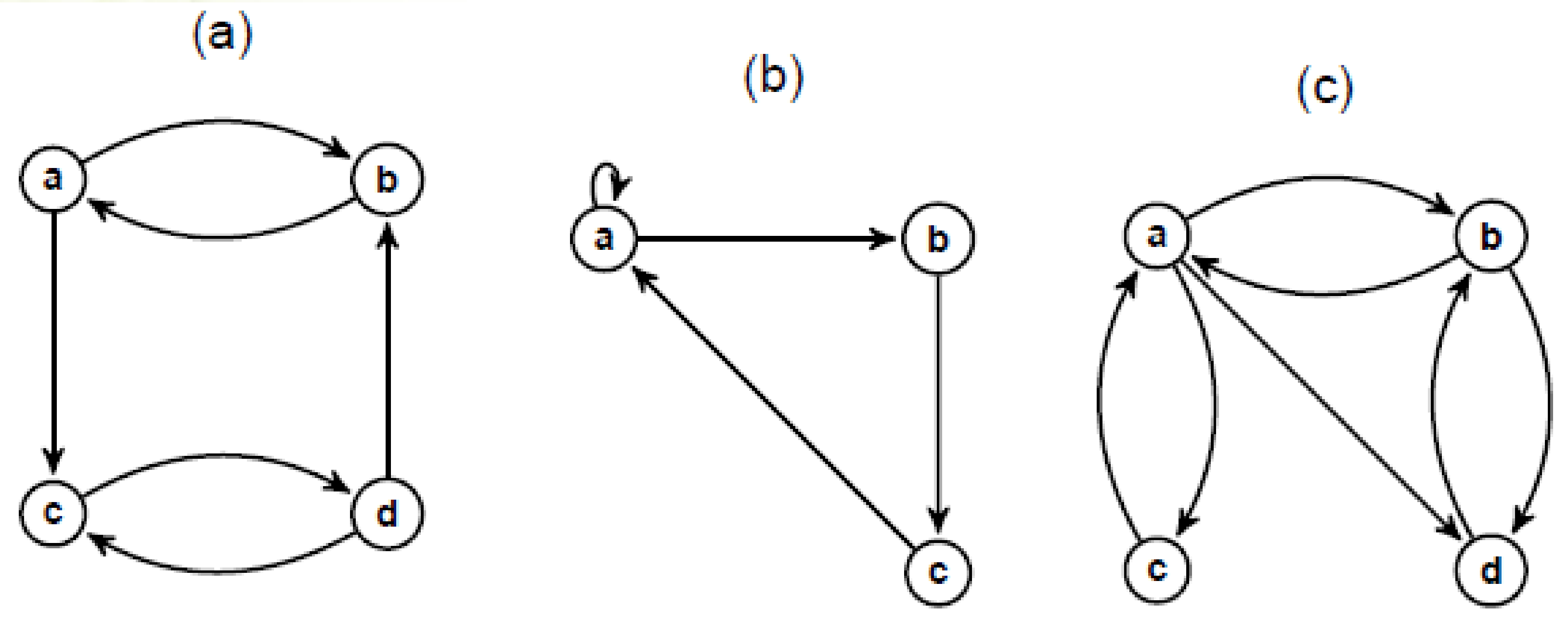
Definição (Fecho Transitivo)

*O **fecho transitivo** R^* de uma relação binária R em A é uma relação binária que satisfaz:*
1. R^* é transitiva
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é outra relação transitiva que contém R, $R^* \subseteq S$.

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$
- R não possui a **propriedade transitiva**
- Aplicando passos sucessivos para encontrar o **Fecho Transitivo** R^*:
  - 1) $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \boxed{(3,2)}, \boxed{(3,3)}, \boxed{(2,1)}\}$
  - 2) $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), \boxed{(2,2)}\}$
- R^* é uma relação transitiva e $R \subseteq R^*$.
- Se S é outra relação transitiva que contém R, então $R \subseteq R^*$ e $R^* \subseteq S$.

Fecho Transitivo

Exercício: encontre o fecho reflexivo, simétrico e transitivo, em cada caso:



Relações de Equivalência

<u>Definição</u>: (Relações de Equivalência)
Uma relação binária em um conjunto A que é **reflexiva, simétrica** e **transitiva** é chamada de **relação de equivalência** em A.

<u>Exemplos</u>: (Relações de Equivalência)

1) $R = \{(x, y) \mid x = y\}$, sobre qualquer conjunto S

2) $R = \{(x, y) \mid x + y$ é par $\}$, sobre o conjunto N

3) $R = \{(x, y) \mid x$ senta na mesma fileira de $y\}$, sobre $\{x \mid x$ é aluno da turma$\}$.

4) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$.

Relações de Equivalência

Exemplo 1: Verifique se a relação R sobre o conjunto dos números reais tal que a relaciona b se e somente se a-b$\in \mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência.

Reflexiva: seja o número inteiro a, então, a-a=0. E 0 está no conjunto dos inteiros;

Simétrica: sejam os números inteiros a e b, então, a-b=t, onde t é um número inteiro. E b-a=-t, e –t também é inteiro.

Transitiva: sejam os números reais a, b e c. Perceba que b-a e c-b pertencem aos inteiros. Agora, note que

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

Logo, a-c também pertence aos inteiros.

Conclusão: R é uma relação de equivalência.

Relações de Equivalência

Exemplo 2: Seja R a relação “x dividido por y é inteiro” no conjunto dos números inteiros com exceção do zero. R é uma relação de equivalência:

Reflexiva: seja o número inteiro a, então, a/a=1. E 1 está no conjunto dos inteiros;

Simétrica: sejam os números inteiros a e b, então, a/b=t, onde t é um número inteiro. E b/a=1/t, e 1/t só é inteiro se t=1.

Conclusão: R não é uma relação de equivalência.

Congruência Módulo m

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Definição (Congruência Módulo m)

Se x e y são inteiros e $m > 1$ é um inteiro positivo,
$x \equiv y \pmod{m}$ se $x - y$ é um múltiplo inteiro de m

- Exemplo: 27 e 2 são **congruentes** módulo 5, pois $27 \equiv 2 \pmod{5}$
- Exemplos:
  - $10 \equiv 2 \pmod{4}$, pois 4 divide 10-2
  - $35 \equiv 10 \pmod{5}$, pois 5 divide 35-10
  - $38 \equiv 2 \pmod{12}$, pois 12 divide 38-2

Classes de Equivalência

Definição (Classes de Equivalência)

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um dado elemento $x \in A$ é denominado de ***classe de equivalência*** *de x.*

- Denotamos a classe de equivalência de x por $[x]$
- $[x]$ é o conjunto de todos os elementos relacionados a x em A.
- Formalmente, $\boxed{[x] = \{y \mid y \in A \wedge (x, y) \in R\}}$
- Se $y \in [x]$, então y é denominado um **representante** dessa classe de equivalência.

Classes de Equivalência

Exemplo:

Seja a relação de equivalência $R = \{(x, y) \mid x$ senta-se na mesma fileira que $y\}$

Suponha que João, Carlinhos, José, Maria e Ana sentam-se na mesma fileira.

Então, [João]={João, Carlinhos, José, Maria, Ana}

[João] = [Maria] = [José] = [Carlinhos] = [Ana]

Estas não são classes distintas, mas sim a mesma classe de equivalência.

Uma classe de equivalência pode usar o nome de qualquer de seus elementos.

Classes de Equivalência

Exemplo:

Seja a relação de equivalência $R = \{(x, y) \mid x + y$ é par $\}$ sobre N.

Essa relação particiona N em duas classes de equivalência:

(i) Se x é par, para todo y par temos $x + y$ par.

(ii) Se x é ímpar, para todo y ímpar temos $x + y$ par.

Todos os números **pares** formam uma classe de equivalência.

Todos os números **ímpares** formam outra classe de equivalência.

Neste exemplo, [2] = [4] = [100]; e [1] = [5] = [213].

Classes de Equivalência

Exercícios:

Para a relação de equivalência $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$, qual é o conjunto $[a]$? Este conjunto tem outro nome?

Para a relação de equivalência
$R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3),(3,3),$
$(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$, qual é o conjunto $[3]$? E o conjunto $[4]$?

Quais são as classes de equivalência de ***0*** e de ***1*** para a *congruência módulo* ***4***?

Classes de Equivalência

Resposta:

A classe de equivalência de ***0*** contém todos os inteiros ***a*** de forma que $a \equiv 0 (mod\ 4)$. Assim,

$[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

A classe de equivalência de ***1*** contém todos os inteiros ***a*** de forma que $a \equiv 1 (mod\ 4)$. Assim,

$[1] = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$