

Notas de aula de Estatística e Probabilidade

Tópico 6 - Assimetria e Curtose

Prof. Louis Augusto

`louis.augusto@ifsc.edu.br`



INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Instituto Federal de Santa Catarina
Campus São José

- 1 Introdução
 - Assimetria e curtose
 - Medidas de Assimetria
 - Medidas de curtose

- 2 Exercícios
 - Enunciados

- 1 **Introdução**
 - **Assimetria e curtose**
 - Medidas de Assimetria
 - Medidas de curtose

- 2 **Exercícios**
 - Enunciados

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições.

Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

As medidas de assimetria e curtose completam o quadro básico das estatísticas descritivas.

Nas aulas anteriores estudamos estatísticas que evidenciam:

- Valores médios ou pelo menos centrais.
- Variabilidade.

Neste item vamos estudar a forma, o aspecto gráfico, das distribuições. Para isto estamos interessados, para a curva de frequência ou histograma, em:

- Grau de deformação da curva (assimetria).
- Grau de achatamento da curva (curtose).

- 1 Introdução
 - Assimetria e curtose
 - Medidas de Assimetria**
 - Medidas de curtose

- 2 Exercícios
 - Enunciados

Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria.

Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências.

Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

Medidas de assimetria

Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria. Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências. Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

Medidas de assimetria

Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria. Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências. Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

Medidas de assimetria

Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria. Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências. Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

Medidas de assimetria

Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria. Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências. Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

Medidas de assimetria

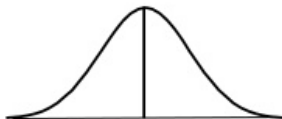
Assimetria, como o nome sugere, significa afastamento da simetria. Para a Estatística é o grau de deformação de uma curva de frequências. Para diferenciar o grau de deformação de uma curva, estabelecem-se três tipos de curvas de frequência:

- Curva **simétrica**: Neste caso as três principais medidas de tendência central são coincidentes: média, moda e mediana.
- Curva com **assimetria positiva**: a média está mais distante que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a esquerda, todavia a maior parte dos termos ficam a direita.
- Curva com **assimetria negativa**: a média está mais próxima que a moda em relação ao início da distribuição. Nesse caso os termos que mais se repetem estão mais a direita, todavia a maior parte dos termos ficam a esquerda.

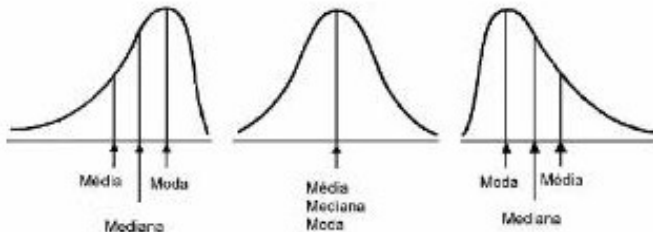
Curvas Simétricas

Nas curvas simétricas as três medidas de tendência central são coincidentes.

Média = Mediana = Moda

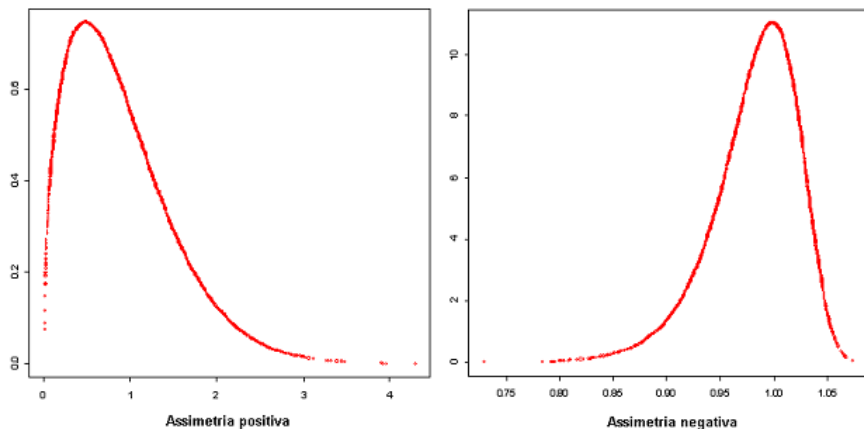


Caso isto não ocorra haverá alguma forma de assimetria:



Medidas de assimetria

Curvas com assimetria positiva (a direita) e negativa (a esquerda).

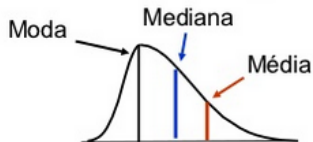


Medidas de assimetria

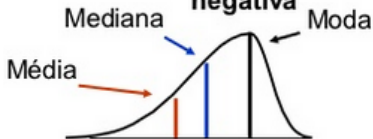
Numa curva com assimetria positiva temos $Mo < Md < \bar{x}$.

Numa curva com assimetria negativa temos $\bar{x} < Md < Mo$.

Assimetria à direita ou positiva



Assimetria à esquerda ou negativa



De uma forma rudimentar, temos:

$\bar{x} > Mo$: Assimetria positiva

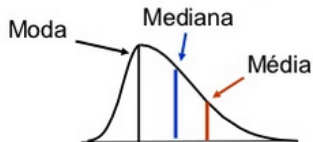
$\bar{x} < Mo$: Assimetria negativa

Medidas de assimetria

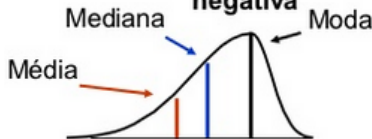
Numa curva com assimetria positiva temos $Mo < Md < \bar{x}$.

Numa curva com assimetria negativa temos $\bar{x} < Md < Mo$.

Assimetria à direita ou positiva



Assimetria à esquerda ou negativa



De uma forma rudimentar, temos:

$\bar{x} > Mo$: Assimetria positiva

$\bar{x} < Mo$: Assimetria negativa

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

● Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

● Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

- 1 Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- 2 Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

- 1 Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- 2 Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

- 1 Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- 2 Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

- 1 Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- 2 Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

Índices de Pearson

Uma medida mais comum para avaliar assimetria das distribuições é proposta por Pearson:

1 Primeiro coeficiente de Pearson:

$$e_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

2 Segundo coeficiente de Pearson:

$$e_2 = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

A relação empírica de Pearson permite transitar entre os dois coeficientes:

$$(\bar{x} - Mo) \approx 3(\bar{x} - Md)$$

A relação de Pearson pode alcançar um valor teórico de ± 3 , mas não é comum o aparecimento de curvas de frequências com deformação superior a ± 1 .

- 1 Admitindo-se que numa distribuição de frequências, $\bar{X} = 95$, $Md = 90$ e $\sigma = 33,33$; determine o primeiro e segundo coeficientes de Pearson e interprete o resultado.
- 2 Para as distribuições abaixo, calcule os coeficientes de Pearson e interprete o resultado.

TABELA 1

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	10
30 —— 40	15
40 —— 50	20
50 —— 60	5
	55

TABELA 2

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	10
30 —— 40	15
40 —— 50	10
50 —— 60	5
	45

TABELA 3

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	20
30 —— 40	15
40 —— 50	10
50 —— 60	5
	55

- 1 Admitindo-se que numa distribuição de frequências, $\bar{X} = 95$, $Md = 90$ e $\sigma = 33,33$; determine o primeiro e segundo coeficientes de Pearson e interprete o resultado.
- 2 Para as distribuições abaixo, calcule os coeficientes de Pearson e interprete o resultado.

TABELA 1

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	10
30 —— 40	15
40 —— 50	20
50 —— 60	5
	55

TABELA 2

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	10
30 —— 40	15
40 —— 50	10
50 —— 60	5
	45

TABELA 3

<i>Classes</i>	<i>f_j</i>
10 —— 20	5
20 —— 30	20
30 —— 40	15
40 —— 50	10
50 —— 60	5
	55

- 1 Introdução
 - Assimetria e curtose
 - Medidas de Assimetria
 - Medidas de curtose

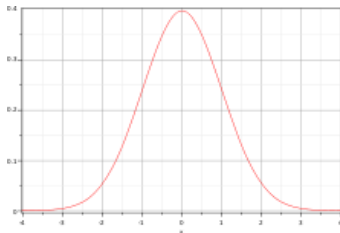
- 2 Exercícios
 - Enunciados

Medidas de curtose

Usamos como padrão de comparação de curvas de distribuição a curva normal, que é definida pela função:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Se uma curva de frequências apresentar achatamento equivalente ao da curva normal é chamada **mesocúrtica**:



Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

Índices de medição de curtose

Utilizaremos o coeficiente percentílico de curtose, que é uma medida elementar, definida pela relação:

$$\kappa = \frac{D_q}{C_{90} - C_{10}}$$

Onde:

D_q Desvio quartílico $D_q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, Q_3 e Q_1 são os terceiro e primeiro quartil, respectivamente.

C_{90} Nonagésimo centil.

C_{10} Décimo centil.

Se:

$k = 0,263$: distribuição mesocúrtica.

$k > 0,263$: distribuição platocúrtica.

$k < 0,263$: distribuição leptocúrtica.

1

Introdução

- Assimetria e curtose
- Medidas de Assimetria
- Medidas de curtose

2

Exercícios

- Enunciados

Exercício 1

Para a distribuição de salários abaixo, determinar:

<i>Salários</i>	<i>Frequências</i>
20 —— 25	10
25 —— 30	15
30 —— 35	20
35 —— 40	18
40 —— 45	4
	67

- 1.) O primeiro e segundo coeficiente de assimetria de Pearson.
- 2.) O coeficiente percentílico de curtose.

Exercício 2

A tabela abaixo apresenta a porcentagem de bactérias encontradas por cm em 100 amostras de um determinado produto:

<i>Classes</i> %	<i>Frequências</i> f_j
0,0 — 0,1	2
0,1 — 0,2	5
0,2 — 0,3	10
0,3 — 0,4	15
0,4 — 0,5	18
0,5 — 0,6	18
0,6 — 0,7	15
0,7 — 0,8	10
0,8 — 0,9	5
0,9 — 1,0	2
	100

Pede-se:

- 1.) O coeficiente percentílico de curtose.
- 2.) O primeiro e segundo coeficientes de assimetria.

Exercício 3

Determinar o coeficiente percentílico de curtose, e os coeficientes de assimetria para a distribuição abaixo:

<i>Classes</i>	f_j
2 — 4	2
4 — 6	8
6 — 8	10
8 — 10	8
10 — 12	2
	30



Geraldo Luciano Toledo e Ivo Isidoro Ovalle,
Estatística Básica
Editora Atlas
São Paulo - 1995.



-  Geraldo Luciano Toledo e Ivo Isidoro Ovalle,
Estatística Básica
Editora Atlas
São Paulo - 1995.
-  Murray R. Spiegel
Estatística - coleção Schaum.
Editora McGraw-Hill, 3ª edição 1994.