

Curso: Engenharia de Controle e Automação; Unidade Curricular: Álgebra Linear
Professora: Grazielli Vassoler Rutz

1. Matrizes

1.1. Definição de Matrizes

Seja A é uma matriz do tipo $m \times n$, onde m é o número de linhas e n é o número de colunas e a_{ij} um elemento de A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

i) a_{32} é o elemento que está na 3ª linha e 2ª coluna

As colunas de A serão denotadas por $a_1, \dots, a_n$ e podem ser escritas como:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

Os elementos diagonais são $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ e formam a diagonal principal de A .

1.2. Matriz Diagonal

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos que estão fora da diagonal principal são zeros.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.3. Matriz Nula

É uma matriz cujos elementos são todos zeros.

1.4. Igualdade de Matrizes

Definição: Duas matrizes $m \times n$ A e B são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os i e j.

1.5. Multiplicação por um Escalar

Se A é uma matriz e α é um escalar, então αA é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por α .

Exemplo 1: Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ calcule $3A$ e $\frac{1}{2}A$.

1.6. Soma de matrizes

Exemplo 2: Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, então calcule $A-2B$.

1.7. Propriedades

Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo e sejam r e s escalares:

- i) $A + B = B + A$
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- iii) $A + 0 = A$
- iv) $r(A + B) = rA + rB$
- v) $(r + s)A = rA + sA$
- vi) $r(sA) = (rs)A$

1.8. Multiplicação de Matrizes

É a operação mais importante entre matrizes.

Definição: Se A é uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$, de colunas $b_1 \dots b_p$, então o produto AB é a matriz $m \times p$ cujas colunas são $Ab_1 \dots Ab_p$.

Exemplo 3: Calcule AB, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.9. Transposta de uma matriz

Definição: Dada uma matriz A, $m \times n$, a transposta de A é a matriz $n \times m$, denotada por A^T , cujas colunas são formadas com as linhas correspondentes de A.

Propriedades:

Sejam A e B matrizes cujos tipos são apropriados para as seguintes somas e produtos.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) Para qualquer escalar r, $(rA)^T = rA^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Exemplo 4: Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ então calcule $(AB)^T$, se possível.

1.10. Matriz Identidade

A matriz escalar de qualquer ordem que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ é chamada matriz identidade.

1.11. Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é simétrica se $A^T = A$.

OBSERVAÇÃO:

a) Se $A = a_{ij}$ é simétrica $a_{ij} = a_{ji}$.

b) AA^T resulta em uma matriz simétrica

1.12. Matriz Anti-simétrica

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é anti-simétrica se $A^T = -A$.

1.13. Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A = a_{ij}$, se existir uma matriz B que satisfaça $AB = BA = I$ diz-se que B é a inversa de A e denota-se B por A^{-1} , ou seja, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Exemplo 5: Verifique se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$.

Dizemos que uma matriz A é inversível (não singular) se existe a matriz inversa A^{-1} , caso contrário dizemos que a matriz A é não inversível (singular).

Algumas propriedades importantes:

- A é não-singular se o determinante de A é diferente de zero. A é singular se o determinante de A é igual a zero.
- Se A é uma matriz inversível então sua inversa é única
- Se A é não singular, sua inversa A^{-1} também é, isto é, se $\det A \neq 0$ então $\det A^{-1} \neq 0$. A matriz inversa de A^{-1} é A.

- A matriz identidade é não singular pois $I^{-1} = I$ ($\det I = 1$).
- Se a matriz A é não singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, daí concluímos que se $\det A \neq 0$ então $\det A^T \neq 0$.
- Se as matrizes A e B são não singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não singular. Vale a relação $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemplo 6:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2 \Rightarrow A \text{ é não singular}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B \text{ é singular}$$

1.14. Matriz Ortogonal

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é ortogonal se $A^T = A^{-1}$ e além disso $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$.

1.15. Matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

1.16. Matriz triangular inferior

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é triangular inferior se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

1.17. Matriz Periódica

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é uma matriz periódica se $A^n = A$ para $n \geq 2$.

1.18. Matriz Idempotente

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é uma matriz idempotente $A^2 = A$.

Exemplo 7: Verifique se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ é idempotente.

1.19. Matriz Nilpotente

Uma matriz quadrada $A = a_{ij}$ é uma matriz nilpotente, se existir p , inteiro e positivo, tal que $A^p = 0$. Se p é o menor inteiro positivo tal que $A^p = 0$, diz que A é uma matriz nilpotente de índice p .

Exemplo 8: Verifique se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ é nilpotente e determine seu índice p .

1.20. Matriz Escalonada

Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada, ou escalonada, se:

- a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
- c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquela que possuem pelo menos um elemento não nulo).
- d) Se as linhas $1, \dots, p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.

Exemplo 9:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale b)

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale a) e b)

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale c)

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é forma escada.

1.21. Operações elementares linha

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1º) Permutar a i -ésima e j -ésima linha ($L_i \leftrightarrow L_j$)

2º) Multiplicação da i -ésima linha por um escalar não nulo k ($L_i \leftrightarrow kL_i$)

3º) Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha ($L_i \leftrightarrow L_i + kL_j$)

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é *linha equivalente* a A , se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A .
Notação: $A \sim B$.

1.22. Posto de uma matriz

Dada a matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada, linha equivalente à matriz A . O *posto* de A , denotado por p , é o número de linhas não nulas de B e a *nulidade* de A é $n - p$, onde n é o número de colunas de A e p é o posto de A .

1.23. Cálculo da Inversa

Para se determinar a matriz inversa de uma matriz A , não singular, através de operações elementares entre as linhas da matriz, aplica-se o seguinte procedimento:

- Coloca-se ao lado da matriz A a matriz I , separada por um traço vertical tracejado.
- Transforma-se por meio de operações elementares a matriz A na matriz I , aplicando simultaneamente à matriz I colocada ao lado da matriz A as mesmas operações elementares aplicadas à matriz A .

Exemplo 10: Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ por escalonamento.

2. Determinante de Uma Matriz

Entenderemos por determinante, como sendo um número ou uma função, associado a uma matriz quadrada, calculado de acordo com regras específicas. É importante observar, que só as matrizes quadradas possuem determinante.

Cálculo do Determinante por desenvolvimento de Laplace:

2.1. Regra de Chió: Regra para o cálculo de um determinante de 2ª ordem

Dada a matriz quadrada de ordem 2 a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O determinante de A será indicado por $\det(A)$ e calculado da seguinte forma

$$\det(A) = ad - bc$$

Regra de Sarrus: Regra para o cálculo de um determinante de 3ª ordem

Se A é de ordem 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31})$$

2.2. Desenvolvimento de Laplace: Regra para o cálculo de um determinante de 4ª ordem ou maior (Método dos co-fatores)

Para uma matriz de ordem $n \times n$ usamos o desenvolvimento de Laplace que é dado pela fórmula.

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida a partir da matriz A eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz A . Se chamarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, então:

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$$

Propriedades dos determinantes:

- Uma matriz A é inversível se o $\det(A) \neq 0$
- Para uma matriz triangular, o determinante é o produto da diagonal
- Se A e B são matrizes $n \times n$, então $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- Se A é uma matriz $n \times n$ então $\det(A^T) = \det(A)$
- Se A tem uma linha ou coluna contendo apenas zeros então $\det(A) = 0$
- Se A tem duas linhas ou colunas idênticas, então $\det(A) = 0$
- Se na matriz A uma linha (ou coluna) é múltipla da outra linha (coluna) então $\det(A) = 0$.
- Trocando a posição de duas linhas (colunas) o determinante muda de sinal
- Quando se multiplica uma linha (coluna) de uma matriz A por um número real $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado por esse mesmo número.
- O determinante de uma matriz A não se altera quando se faz a seguinte operação entre linhas: $L_i \rightarrow kL_j$.
- A partir de $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ temos $\det(AA^{-1}) = \det I$, ou seja:

$$\det(A)\det(A^{-1})=1 \Rightarrow \det(A)=\frac{1}{\det A^{-1}}.$$

Exemplo 11: Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Sistemas de Equações Lineares

Uma equação linear é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ na qual $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e b é o termo independente. Os números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e o termo independente b geralmente são números conhecidos e as variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas.

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes das equações lineares.

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistema de equações lineares e tem a seguinte representação:

$$\begin{array}{rcllcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema de equações lineares em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação constituem sua solução.

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Quanto às soluções, três casos podem ocorrer:

- 1) O sistema possui uma única solução. Neste caso dizemos que o sistema é compatível e determinado.
- 2) O sistema possui infinitas soluções. Neste caso dizemos que o sistema é compatível e indeterminado.
- 3) O sistema não possui nenhuma solução. Neste caso dizemos que o sistema é incompatível.

Resumo: Dado um sistema de m equações e n incógnitas seja A_a a matriz ampliada do sistema e seja A_c a matriz linha equivalente a matriz A_a onde a matriz dos coeficientes está na forma escada. Seja p_a o posto da matriz ampliada e p_c o posto da matriz dos coeficientes obtidos a partir de A_c .

- Se $p_a \neq p_c$ então o sistema é incompatível (não possui solução).
- Se $p_a = p_c$ então o sistema é compatível (possui solução). Seja $p = p_a = p_c$, se $p = n$ então o sistema é compatível e determinado (possui uma única solução). Se $p < n$ o sistema é compatível e indeterminado (possui infinitas soluções).

Exemplo 12: Classificar e resolver o sistema:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}.$$

Exemplo 13: Classificar e resolver o sistema:
$$\begin{cases} 4y + 2x + 6z = -6 \\ -4z - 2y + 3x = -38 \\ x + 3z + 2y = -3 \end{cases}.$$

Exemplo 14: Classificar e resolver o sistema:
$$\begin{cases} 6x - 4y - 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$