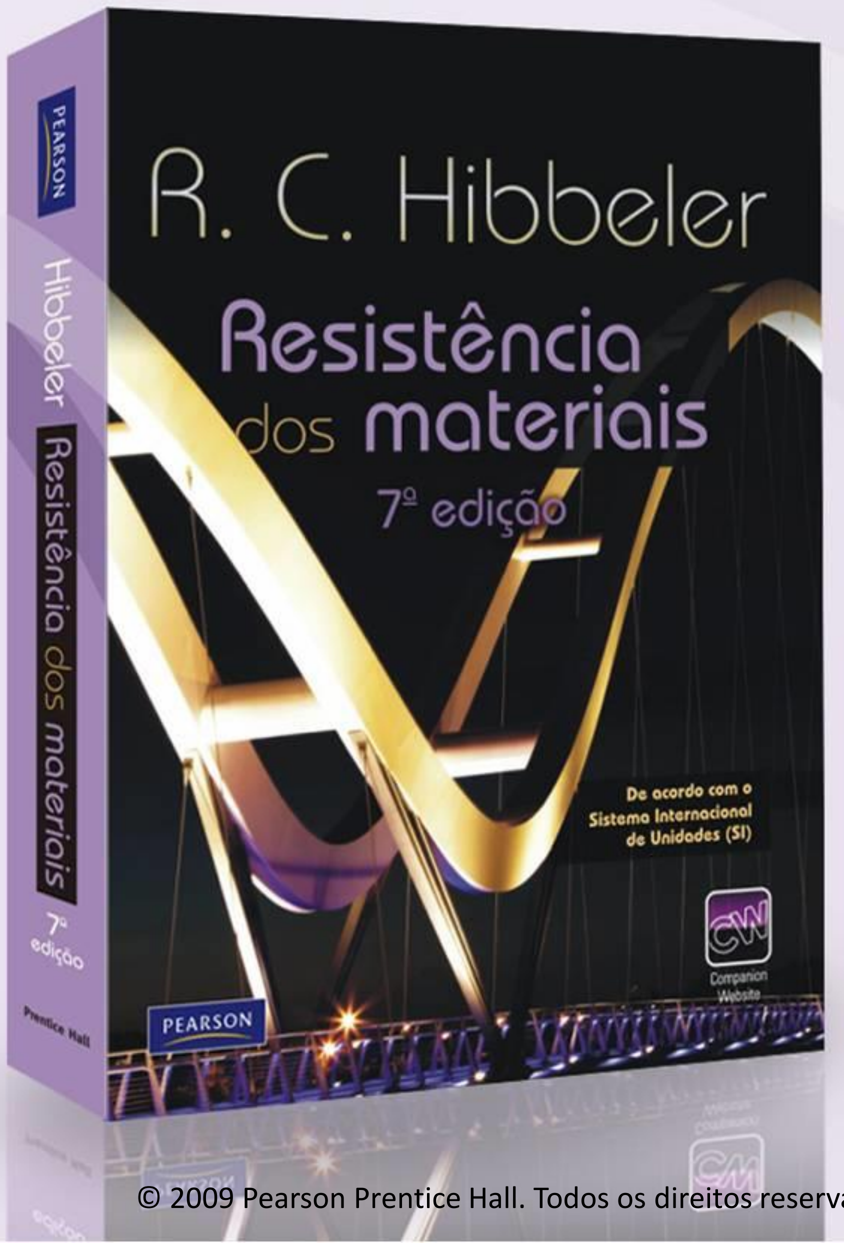
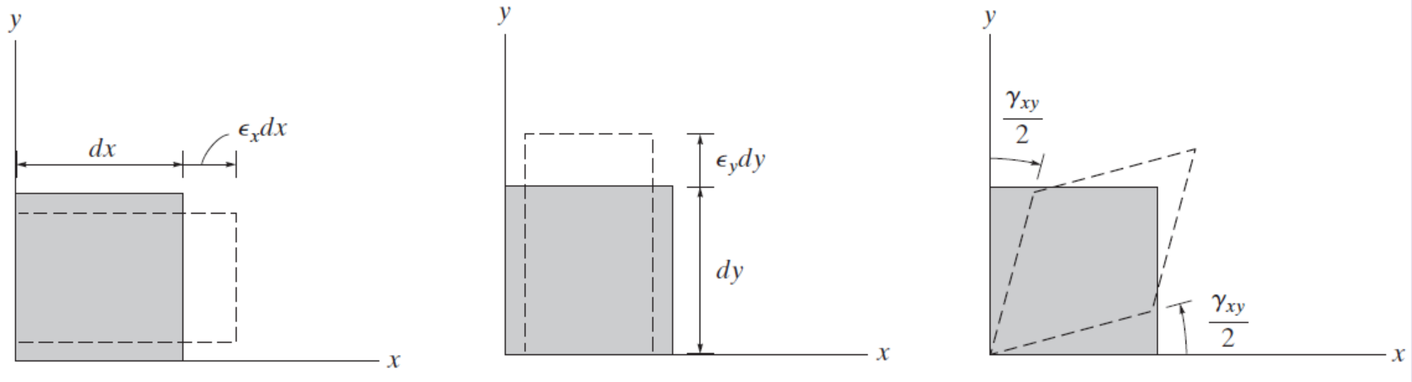
Capítulo 2

Transformação da Deformação



Deformação Plana

- Estado geral de deformação em um ponto em um corpo é representado por uma combinação de três componentes de deformação normal, $(\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z)$ e três de deformação por cisalhamento $(\gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z)$.
- As componentes da deformação normal e por cisalhamento no ponto variarão de acordo com a orientação do elemento.



Deformação normal ϵ_x
(a)

Deformação normal ϵ_y
(b)

Deformação por cisalhamento γ_{xy}
(c)

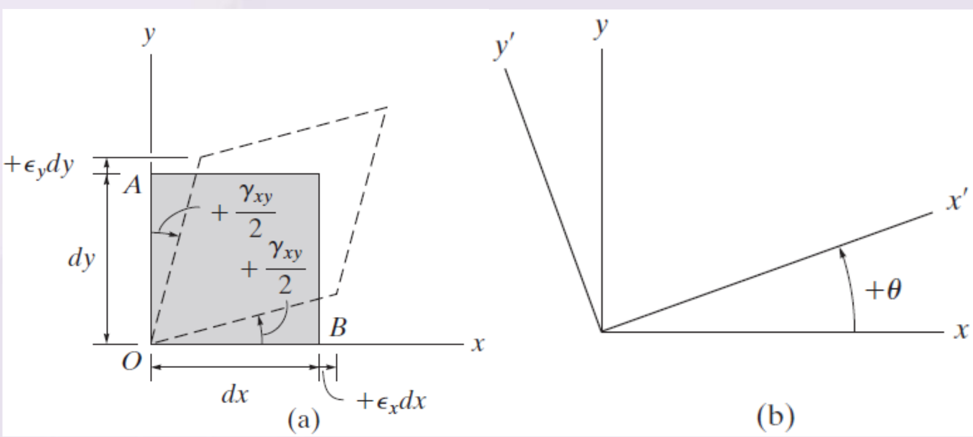
Equações gerais de transformação no plano de deformação

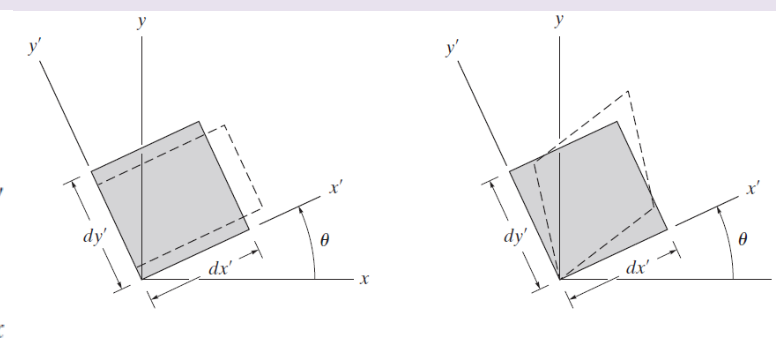
- **Equações de Transformação:**

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$





Deformação normal positiva, $\epsilon_{x'}$

(a)

Deformação por cisalhamento positiva, $\gamma_{x'y'}$

(b)

Equações gerais de transformação no plano de deformação

Transformações principais

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Deformação por cisalhamento máxima no plano.

- Deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média são as seguintes:

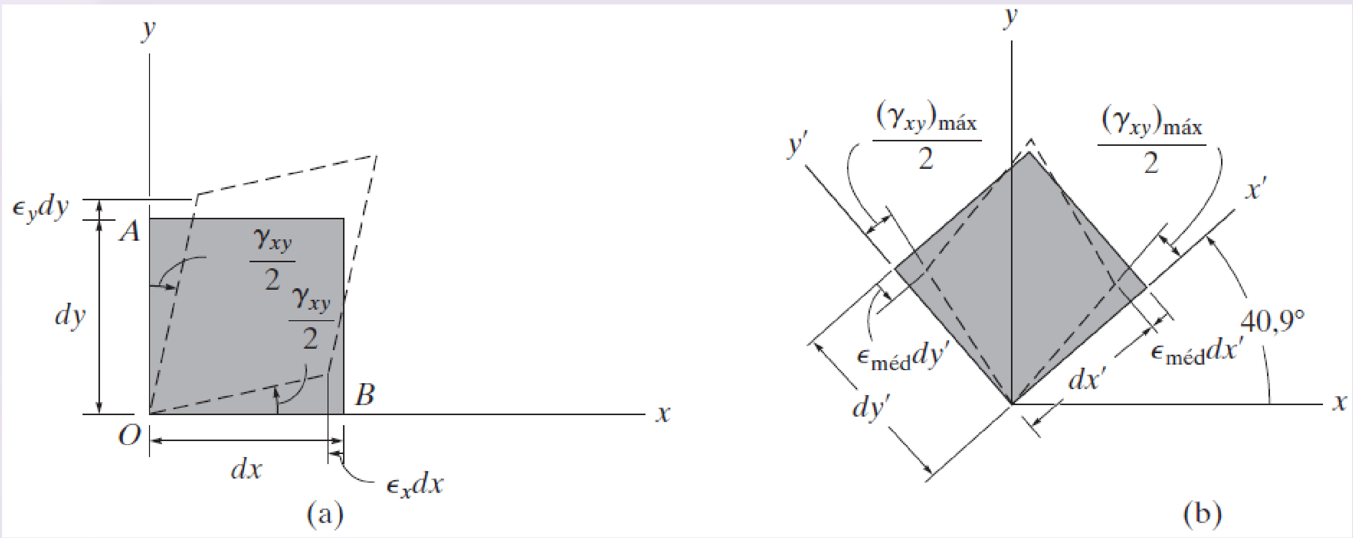
$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$\frac{\gamma^{\text{máx}}_{\text{no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Exemplo 10.3

Um elemento diferencial de material em um ponto está sujeito a um estado de plano de deformação definido por $\varepsilon_x = -350\left(10^{-6}\right), \varepsilon_y = 200\left(10^{-6}\right), \gamma_{xy} = 80\left(10^{-6}\right)$ que tende a distorcer o elemento como mostra a figura abaixo. Determine a deformação por cisalhamento máxima no plano no ponto e a orientação do elemento associada.



Solução:

Olhando pela orientação do elemento,

$$\text{tg}\, 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

Assim, $2\theta_s = 81{,}72^\circ$ e $81{,}72^\circ + 180^\circ = 261{,}72^\circ$, de modo que

$$\theta_s = 40{,}9^\circ \text{ e } 131^\circ$$

Para deformação por cisalhamento máxima no plano

$$\frac{\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}} = 556(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

Círculo de Mohr — plano de deformação

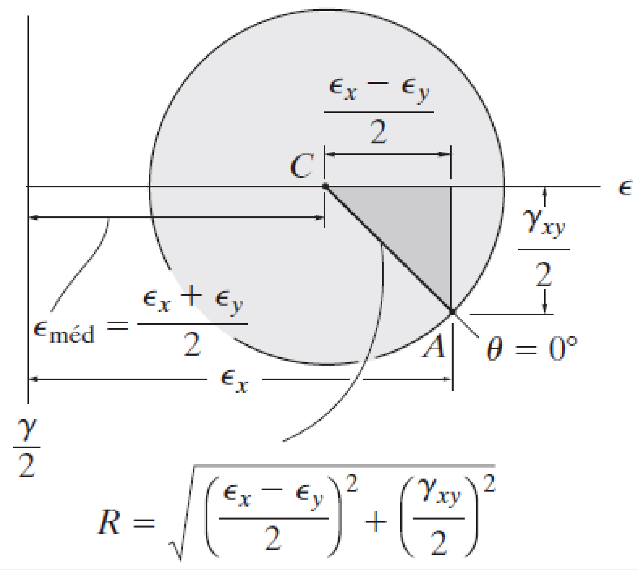
- Também podemos resolver problemas que envolvem a transformação da deformação usando o círculo de Mohr.

$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{méd})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R$$

onde

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$



- Com centro sobre o eixo ε no ponto C($\epsilon_{méd}$, 0) e raio *R*.

Exemplo 10.5

O estado plano de deformação em um ponto é representado pelas componentes;

$$\varepsilon_x = 250\left(10^{-6}\right), \varepsilon_y = -150\left(10^{-6}\right), \gamma_{xy} = 120\left(10^{-6}\right)$$

Determine as deformações principais e a orientação do elemento.

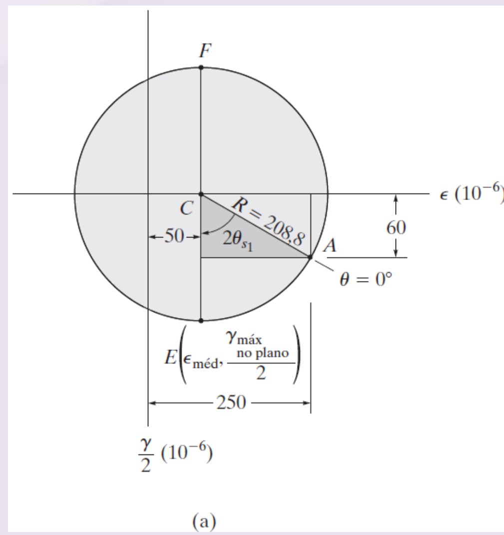
Solução:

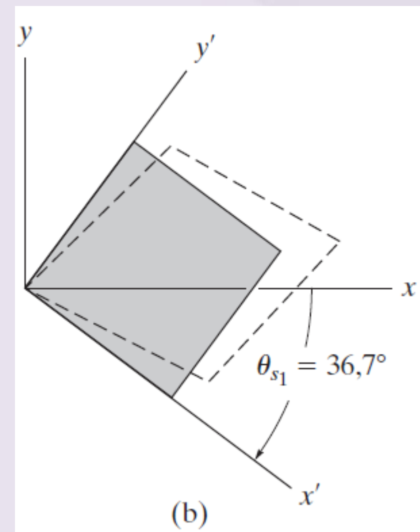
Das coordenadas do ponto *E*, nós temos

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx}\\\text{no plano}}}}{2} = 208{,}8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx}\\\text{no plano}}} = 418(10^{-6})$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = 50(10^{-6})$$





Para orientar o elemento, podemos determinar o ângulo em sentido horário

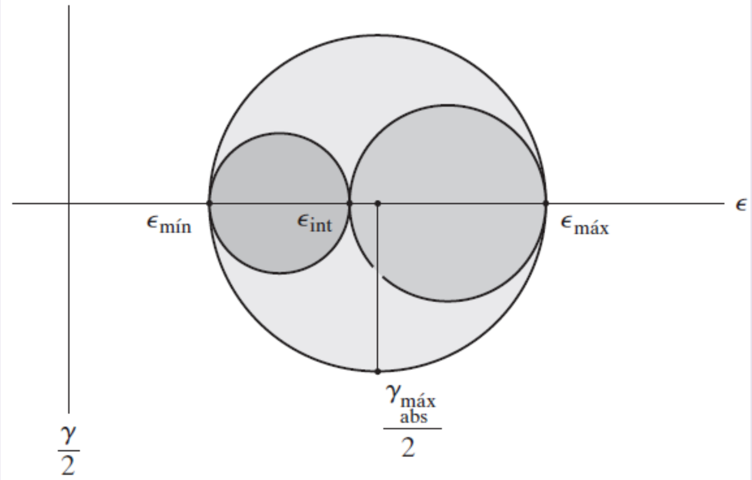
$$2\theta_{s_1} = 90^\circ - 2(8{,}35^\circ)$$
$$\theta_{s_1} = 36{,}7^\circ$$

Deformação por cisalhamento máxima absoluta

- ***Deformação por cisalhamento máximo absoluto*** é determinada pelo círculo que tem maior raio.
- Ela ocorre no elemento orientado a 45º em torno do eixo em relação ao elemento mostrado em sua posição original.

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = \epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}}$$

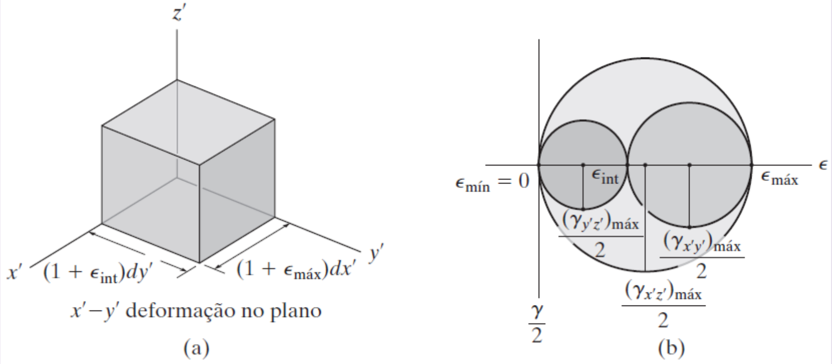
$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_{\text{máx}} + \epsilon_{\text{mín}}}{2}$$

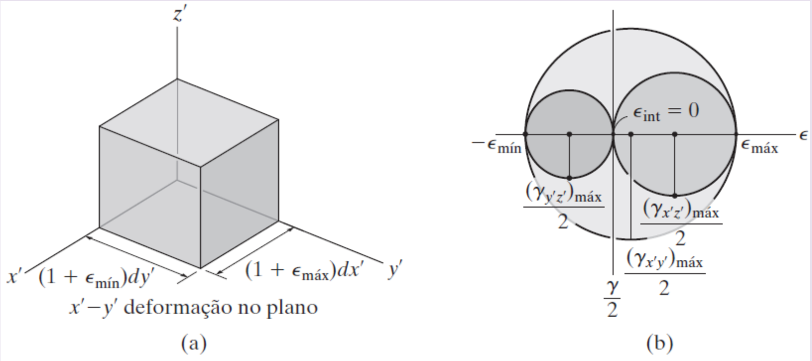


Deformação por cisalhamento máxima absoluta

Deformação plana

- Para deformação plana, nós temos,





- Este valor representa a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* para o material.

$$\gamma_{\substack{máx\\abs}} = (\gamma_{x'z'})_{máx} = \epsilon_{máx}$$

$$\gamma_{\substack{máx\\abs}} = (\gamma_{x'y'})_{máx} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}$$

Exemplo 10.7

O estado plano de deformação em um ponto é representado pelas componentes da deformação,

$$\varepsilon_x = 400\left(10^{-6}\right), \varepsilon_y = 200\left(10^{-6}\right), \gamma_{xy} = 150\left(10^{-6}\right)$$

Determine a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

Solução:

Pelas componentes da deformação, o centro do círculo encontra-se sobre o eixo ε;

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{-400 + 200}{2}(10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

Como $\frac{\gamma_{xy}}{2} = 75\left(10^{-6}\right)$, as coordendas do ponto de referência são

$$A\left(-400\left(10^{-6}\right), 75\left(10^{-6}\right)\right)$$

Portanto, o raio do círculo é $R = \left[\sqrt{(400-100)^2 + 75^2}\right]\left(10^{-6}\right) = 309\left(10^{-9}\right)$

Calculando as deformações principais do plano, temos

$$\epsilon_{máx} = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$

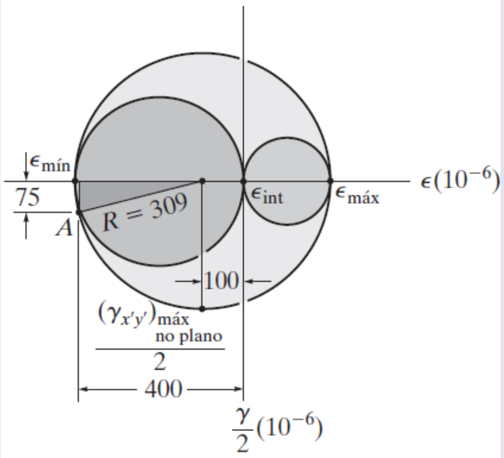
$$\epsilon_{mín} = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

Pelo círculo, a deformação por cisalhamento máxima no plano é

$$\gamma_{\substack{máx \\ \text{no plano}}} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín} = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6})$$ *Resposta*

Pelos resultados acima, temos $\epsilon_{máx} = 209(10^{-6}), \epsilon_{int} = 0, \epsilon_{mín} = -409(10^{-6})$.

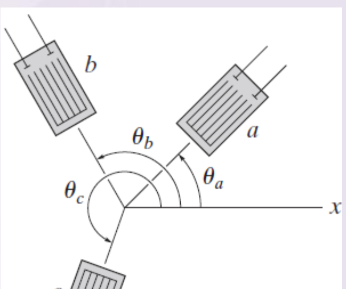
O círculo de Mohr como o seguinte,



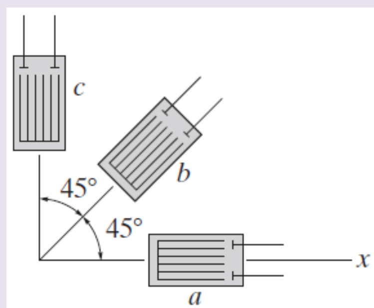
Rosetas de deformação

- A deformação normal em um corpo de prova de tração pode ser medida com a utilização de um **extensômetro de resistência elétrica**.
- A equação de transformação da deformação para cada extensômetro são as seguintes:

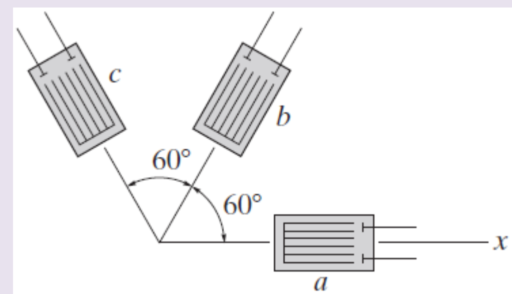
$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_a + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_a \cos \theta_a$$
$$\epsilon_b = \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_b + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_b \cos \theta_b$$
$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_c + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c$$



(a)



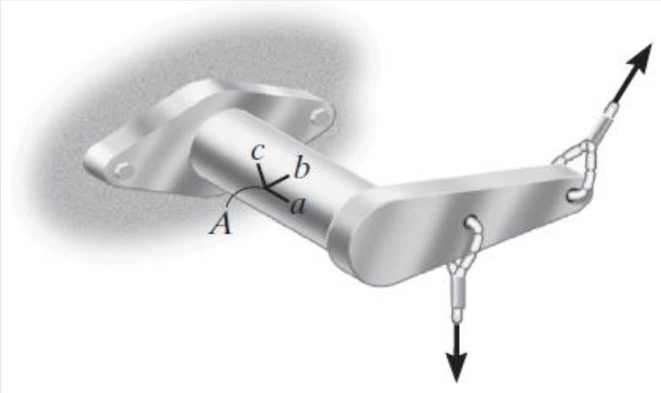
roseta de deformação a 45°
(b)



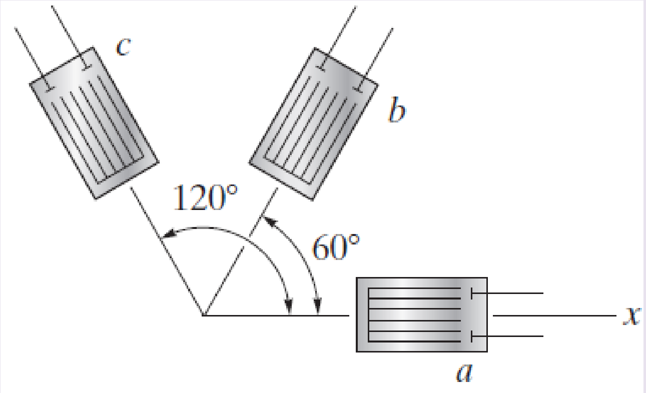
roseta de deformação a 60°
(c)

Exemplo 10.8

O estado de deformação no ponto *A* sobre o suporte na figura (a) é medido por meio da roseta de deformação como mostrada nas figura (b). Devido às cargas aplicadas, as leituras do extensômetros dão $\varepsilon_a = 60(10^{-6})$, $\varepsilon_b = 135(10^{-6})$ e $\varepsilon_c = 264(10^{-6})$. Determine as deformações principais no plano no ponto e as direções nas quais elas agem.



(a)



(b)

Solução:

Medindo os ângulos em sentido anti horário, $\theta_a = 0^\circ, \theta_b = 60^\circ \text{ e } \theta_c = 120^\circ$

Substituindo os valores por 3 equações de transformação da deformação, temos $\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$

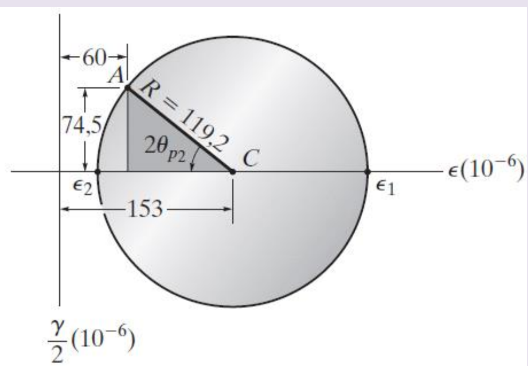
Usando o círculo de Mohr, temos A(60(10^{-6}), 60(10^{-6})) e centro C (153(10^{-6}), 0).

$$R = \left[\sqrt{(153 - 60)^2 + (74{,}5)^2}\right](10^{-6}) = 119{,}1(10^{-6})$$

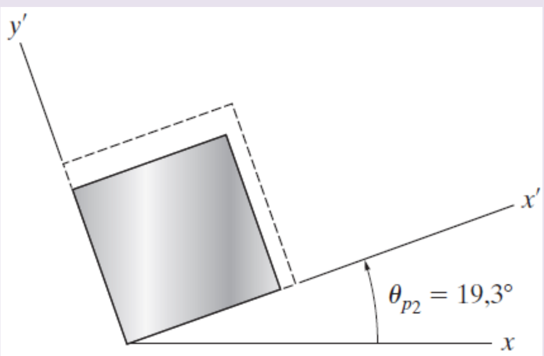
Assim, as deformações principais no plano são

$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119{,}1(10^{-6}) = 272(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$
$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119{,}1(10^{-6}) = 33{,}9(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$2\theta_{p_2} = \text{tg}^{-1}\frac{74{,}5}{(153 - 60)} = 38{,}7^\circ$$
$$\theta_{p_2} = 19{,}3^\circ \qquad \textit{Resposta}$$



(c)



(d)

Relações entre o material e suas propriedades

Lei de Hooke Generalizada

- Para um estado de tensão triaxial, a lei de Hooke generalizada é como a seguir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - v\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \;,\; \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - v\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \;,\; \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

- Eles são válidos somente para materiais lineares elásticos.
- A lei de Hooke para tensão de cisalhamento e deformação por cisalhamento pode ser escrita como:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Relações entre o material e suas propriedades

Relações que envolvem E, *v*, e G

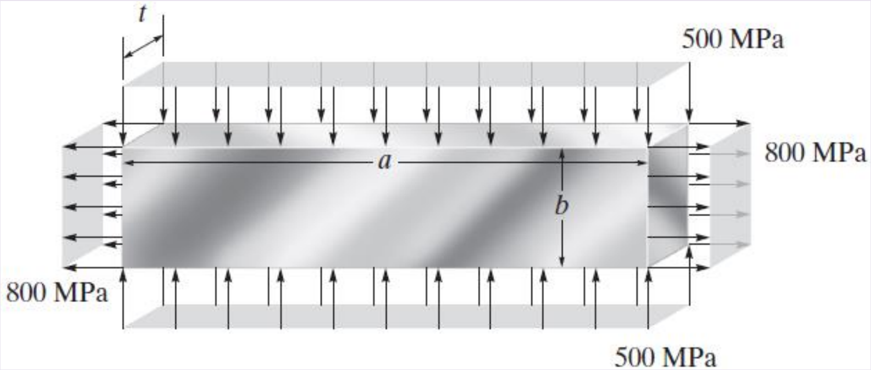
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- **Dilatação e Módulo de compressibilidade**
- *Dilatação*, ou *deformação volumétrica*, é causada somente por tensão normal, não tensão de deformação.
- *Módulo de compressibilidade* é uma medida de inflexibilidade do volume de um material.
- Escoamento plástico ocorre à *v* = 0.5.

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Exemplo 10.8

A barra de cobre na figura está sujeita a uma carga uniforme ao longo de suas bordas. Se tiver comprimento a = 300 mm, largura b = 500 mm, e espessura t = 20 mm antes da carga ser aplicada, determine seus novos comprimentos, largura, e espessura após a aplicação da carga. Considere $E_{co} = 120\ \text{GPa}, \nu_{co} = 0{,}34.$



Solução:

Pelas cargas temos $\sigma_x = 800 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -500 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_z = 0$

As deformações normais associadas são determinadas pela lei de Hooke generalizada,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) = 0.00808\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_z\right) = -0.00643\,, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -0.000850$$

Os novos comprimentos, largura, e espessura são, portanto

$$a' = 300 \text{ mm} + 0{,}00808(300 \text{ mm}) = 302{,}4 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$b' = 50 \text{ mm} + (-0{,}00643)(50 \text{ mm}) = 49{,}68 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$t' = 20 \text{ mm} + (-0{,}000850)(20 \text{ mm}) = 19{,}98 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Teoria de Falhas

- Falha para material *dúctil* cororre pelo *escoamento*, ao passo que se for *frágil*, isso ocorrerá pela *ruptura*.

Materiais Dúcties

- O *escoamento do material dúctil*, acontece ao longo dos planos de contato dos cristais orientados aleatoriamente e que formam o material.
- ***Teoria da Tensão de Cisalhamento Máxima,*** ou **critério de escoamento de *Tresca*** é usada para prever a tensão de falha de um material dúctil sujeito a qualquer tipo de carga.

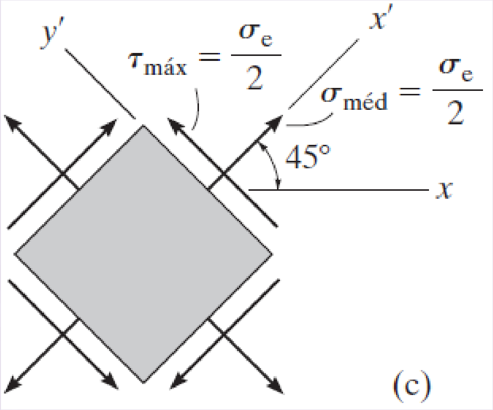
Teoria de Falhas

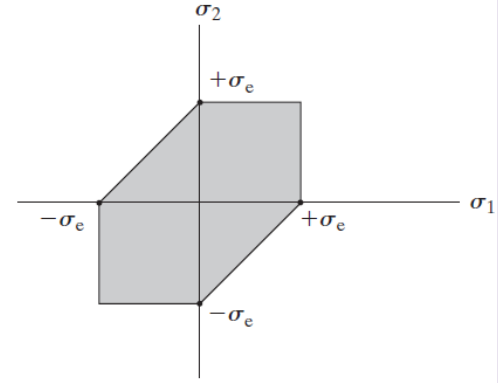
Materias Dúcteis

- Em referência a *tensão do plano*, a teoria da tensão de cisalhamento máxima para *tensão do plano* podem ser expressadas pelas duas tensões principais.

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_e \\ |\sigma_2| &= \sigma_e \end{aligned}\right\} \sigma_1, \sigma_2 \text{ têm os mesmos sinais}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_e \ \} \ \sigma_1, \sigma_2 \text{ têm sinais opostos}$$



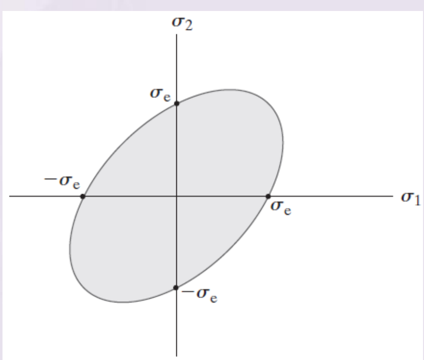


Teoria da tensão de cisalhamento máxima

Teoria de Falhas

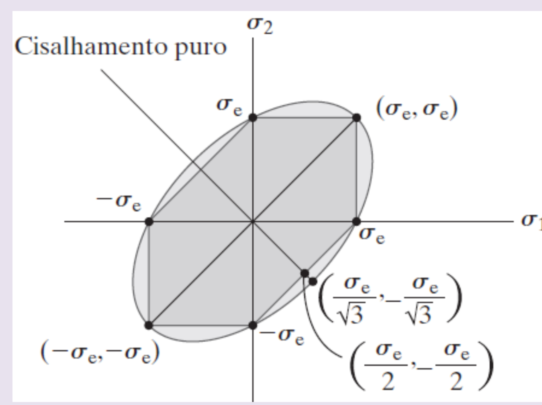
Materias Dúcteis

- A energia por volume de material é chamada de ***densidade de energia de deformação***.
- O escoamento em um material dúctil ocorre quando a *energia de distorção* por unidade de volume do material é igual ou ultrapassa a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material.
- Essa teoria é chamada **teoria da energia de distorção máxima**.



Teoria da energia de distorção máxima

$$\boxed{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_e^2}$$

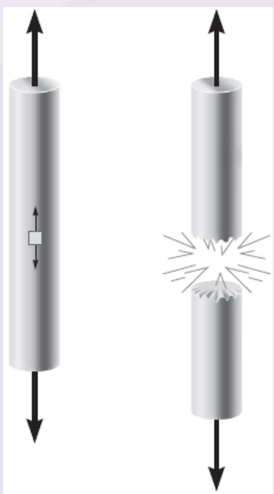


Teoria de Falhas

Materiais Frágeis

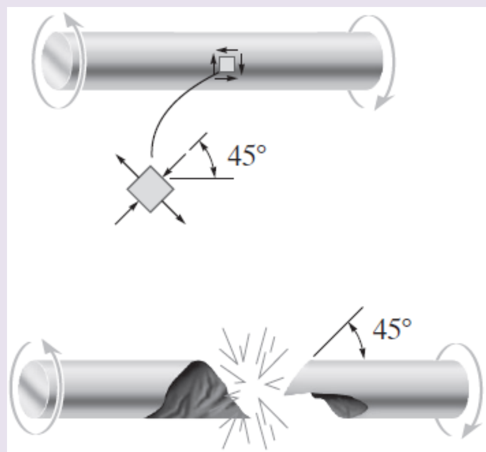
- ***Teoria da tensão normal máxima*** afirma que esses materiais tendem a falhar repentinamente por ruptura,quando ocorre a tensão de tração máxima.

$$\boxed{\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_r \\ |\sigma_2| &= \sigma_r \end{aligned}}$$



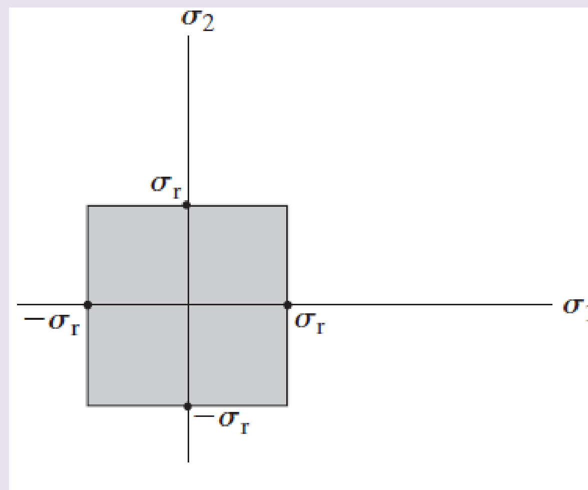
Falha de um material frágil sob tração

(a)



Falha de um material frágil sob torção

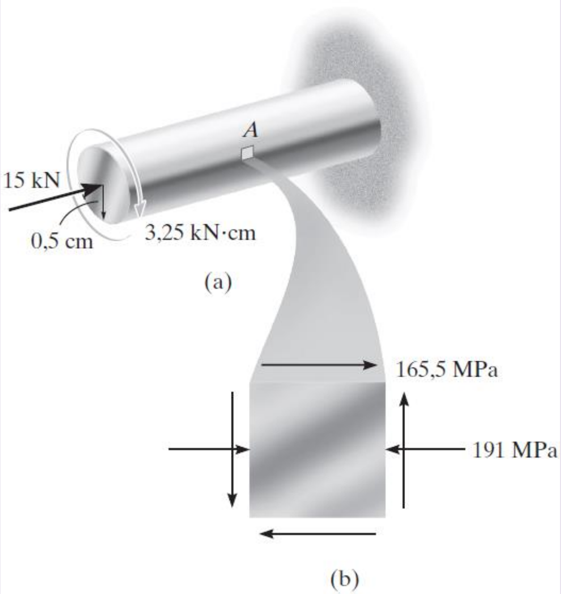
(b)



Teoria da tensão normal máxima

Exemplo 10.8

O eixo maciço mostrado na figura (a) tem raio de 0.5 cm e é feito de aço com tensão de escoamento de σ = 360 MPa. Determine se as cargas provocam a falha do eixo de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima e a teoria da energia de distorção máxima.



Solução:

Visto a tensão de cisalhamento máxima causada pelo torque, nós temos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{15\text{ kN}}{\pi(0,5\text{ cm})^2} = -19,10\text{ kN/cm}^2 = 191\text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3,25\text{ N}\cdot\text{m}\,(0,5\text{ cm})}{\frac{\pi}{2}(0,5\text{ cm})^4} = 16,55\text{ kN/cm}^2 = 165,5\text{ MPa}$$

Tensões principais também podem ser obtidas pelas equações de transformação de tensão,

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \\
&= \frac{-191 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-191 - 0}{2}\right)^2 + (165,5)^2} \\
&= -95,5 \pm 191,1 \\
\sigma_1 &= 95,6\text{ MPa} \\
\sigma_2 &= -286,6\text{ MPa}
\end{aligned}$$

Visto que as tensões principais tem *sinais opostos*, a deformação por cisalhamento máxima absoluta ocorrerá no plano,

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_e$$

$$|95{,}6 - (-286{,}6)| \overset{?}{\leq} 360$$

$$382{,}2 > 360$$

Assim, a falha por cisalhamento do material ocorrerá de acordo com essa teoria.

Usando a teoria da energia de distorção máxima,

$$\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) \leq \sigma_e^2$$

$$[(95{,}6)^2 - (95{,}6)(-286{,}6) - (-286{,}6)^2] \overset{?}{\leq} (360)^2$$

$$118.677{,}9 \leq 129.600$$

Usando esta teoria, não ocorrerá falha.