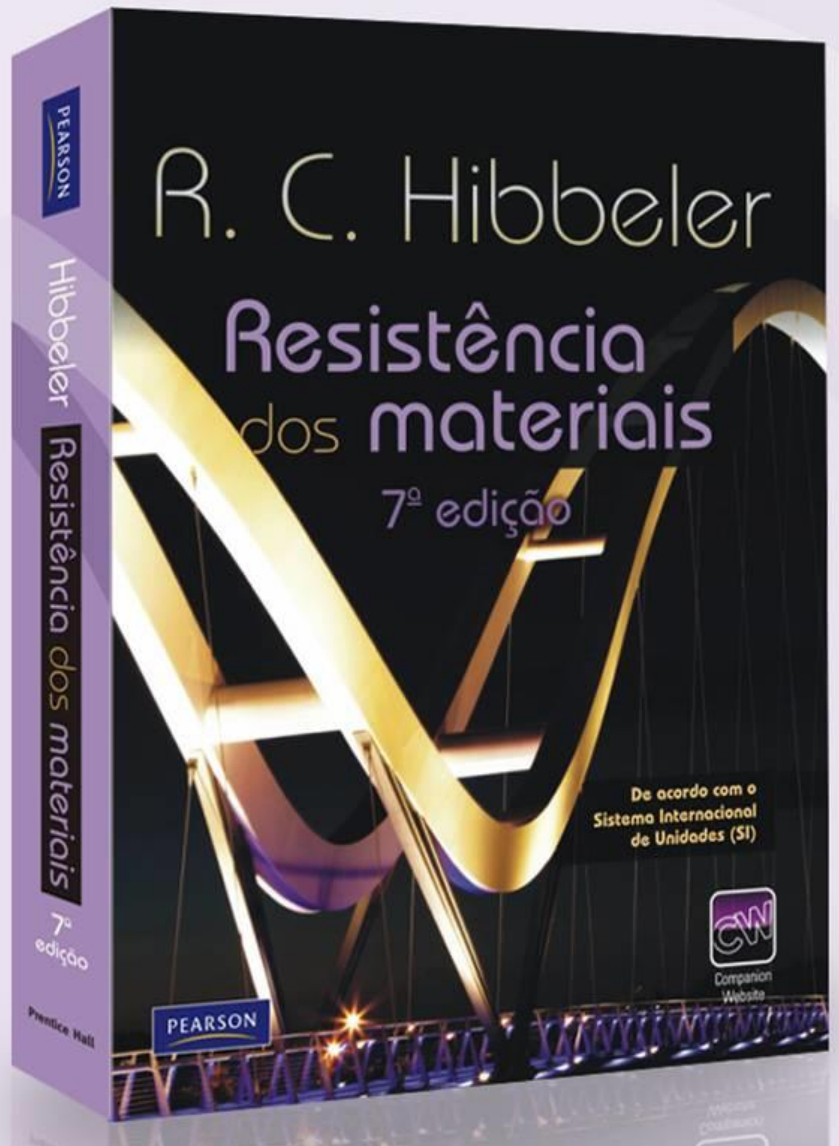
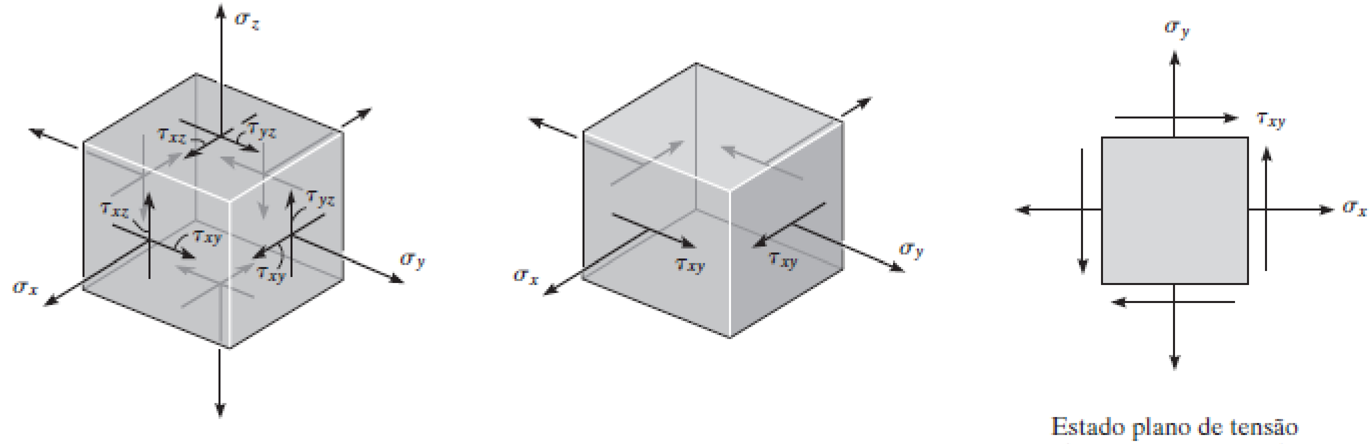
Capítulo 1

# Transformação de Tensão



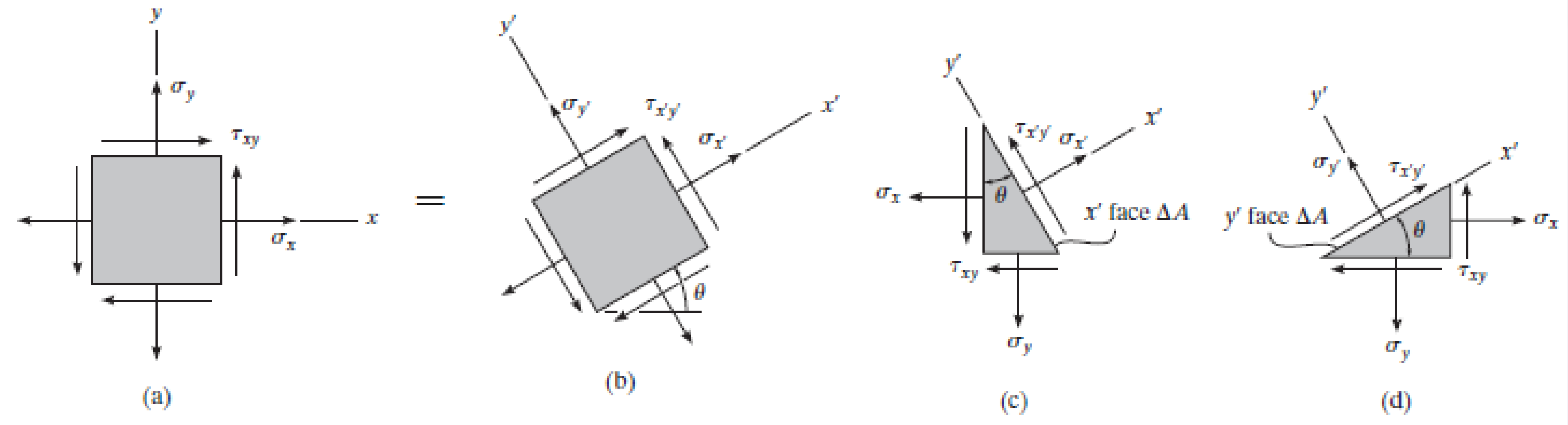
# Transformação de tensão no plano

- O estado geral de tensão em um ponto é caracterizado por *seis* componentes independentes da tensão normal e de cisalhamento.
- A tensão produzida em um elemento estrutural ou mecânico pode ser analisada em um único plano. Quando isso ocorre, o material está sujeito a *tensões no plano.*




Estado geral de tensão (a) — Estado plano de tensão (b) — Estado plano de tensão (visão bidimensional) (c)

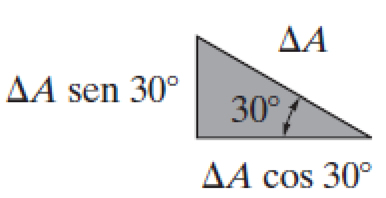
- Componentes de tensão podem se *transformar* em um elemento caso tenha uma orientação diferente.

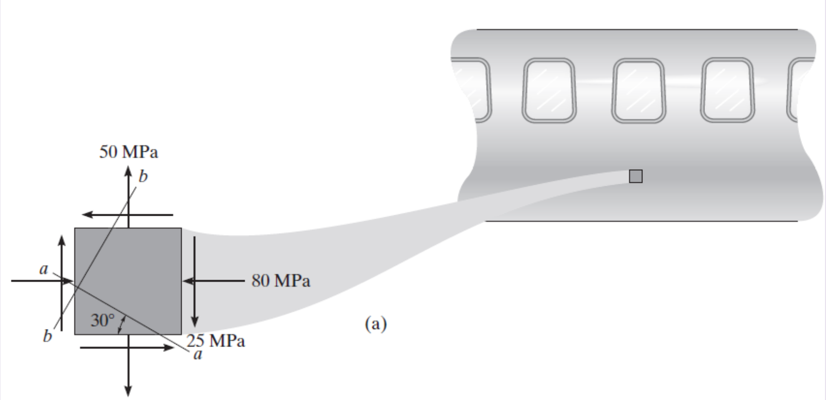


(a) (b) (c) (d)

# Exemplo 9.1

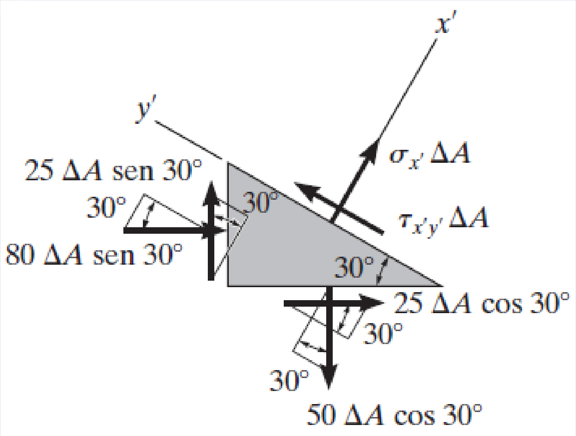
O estado plano de tensão em um ponto da superfície da fuselagem do avião é representado no elemento orientado como mostra a figura. Represente o estado de tensão no ponto em um elemento orientado a 30º no sentido horário em relação à posição mostrada.



**Solução:**

O elemento é secionado pela reta *a–a.*

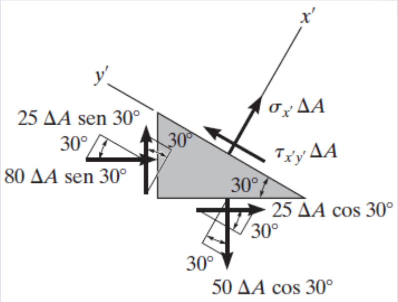



O diagrama de corpo livre do segmento é mostrado.

Aplicando as equações de equilíbrio de força nas direções *x*' e *y*',

$$\nearrow + \sum F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\Delta A - (50\Delta A\cos 30°)\cos 30° + (25\Delta A\cos 30°)\text{sen}30° + (80\Delta A\text{sen}30°)\text{sen}30° + (25\Delta A\text{sen}30°)\cos 30° = 0$$

$$\sigma_{x'} = -4{,}15\ \text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

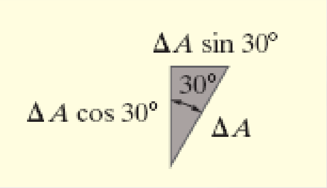



$$\nwarrow + \sum F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\Delta A - (50\Delta A\cos 30°)\text{sen}30° - (25\Delta A\cos 30°)\cos 30° - (80\Delta A\text{sen}30°)\cos 30° + (25\Delta A\cos 30°)\text{sen}30° = 0$$

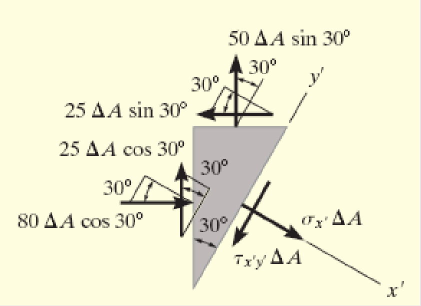
$$\tau_{x'y'} = 68{,}8\ \text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

Repita o procedimento para obter a tensão no plano *perpendicular b–b*.

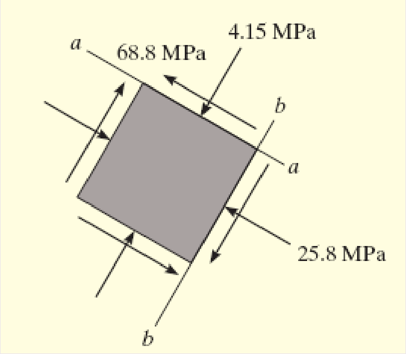
$$\searrow + \sum F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\Delta A - (25\Delta A\cos 30°)\text{sen}30° + (80\Delta A\cos 30°)\cos 30°$$
$$-(25\Delta A\cos 30°)\cos 30° - (50\Delta A\text{sen}30°)\text{sen}30° = 0$$
$$\sigma_{x'} = -25{,}8\ \text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$




$$\nearrow + \sum F_{y'} = 0; \quad -\tau_{x'y'}\Delta A + (25\Delta A\cos 30°)\cos 30° + (80\Delta A\cos 30°)\text{sen}30°$$
$$-(25\Delta A\text{sen}30°)\text{sen}30° + (50\Delta A\text{sen}30°)\cos 30° = 0$$
$$\tau_{x'y'} = 68{,}8\ \text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

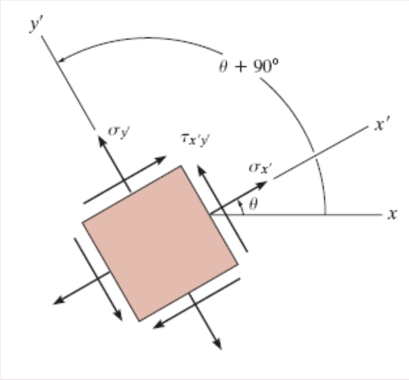



O estado de tensão no ponto pode ser representado escolhendo um elemento orientado.



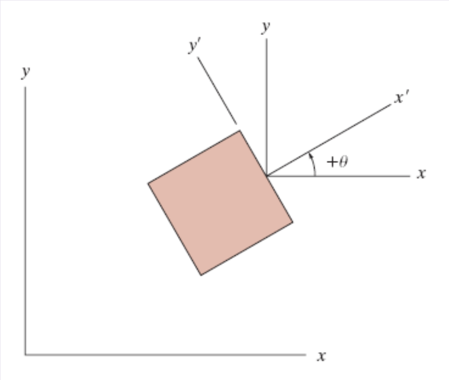
# Equações gerais de transformação de tensão no plano

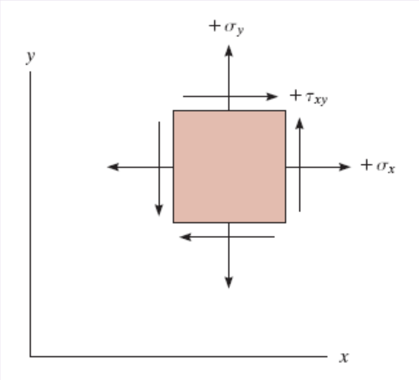
- A tensão normal positiva age para fora de todas as faces e a tensão de cisalhamento positiva age para cima na face direita do elemento.




$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

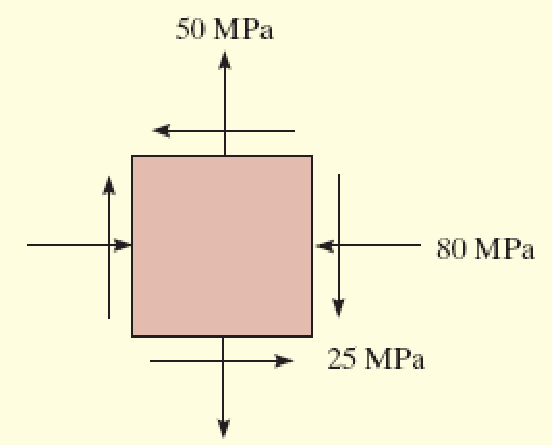
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$



# Exemplo 9.2

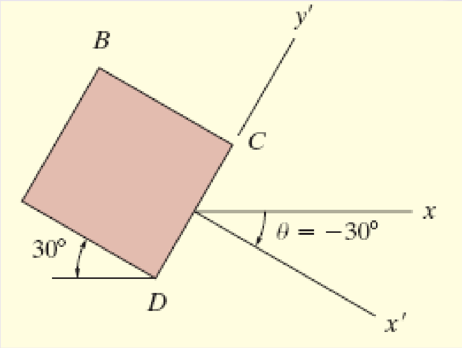
O estado plano de tensão em um ponto é representado pelo elemento mostrado na figura. Determine o estado de tensão no ponto em outro elemento orientado a 30º no sentido anti-horário em relação à posição mostrada.



## Solução:

Pela convenção de sinal, temos

$$\sigma_x = -80\,\text{MPa} \quad \sigma_y = 50\,\text{MPa} \quad \tau_{xy} = -25\,\text{MPa} \quad \theta = -30°$$




Para obter as componentes de tensão no plano *CD*,

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = -25{,}8\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -68{,}8\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

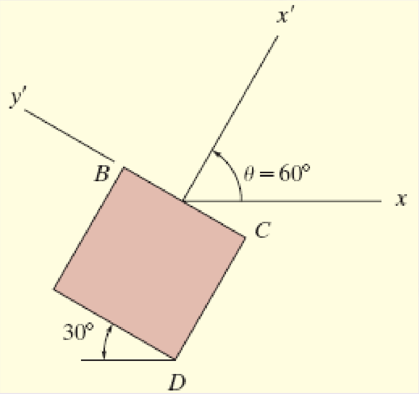
 

Para obter os componentes de tensão no plano *BC*,

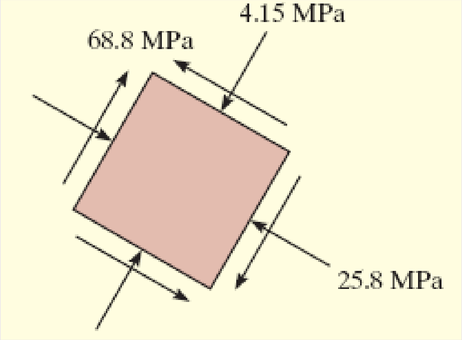
$$\sigma_x = -80\,\text{MPa} \qquad \sigma_y = 50\,\text{MPa} \qquad \tau_{xy} = -25\,\text{MPa} \quad \theta = -60^\circ$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = -4{,}15\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = 68{,}8\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$




Os resultados são motrados na figura abaixo.

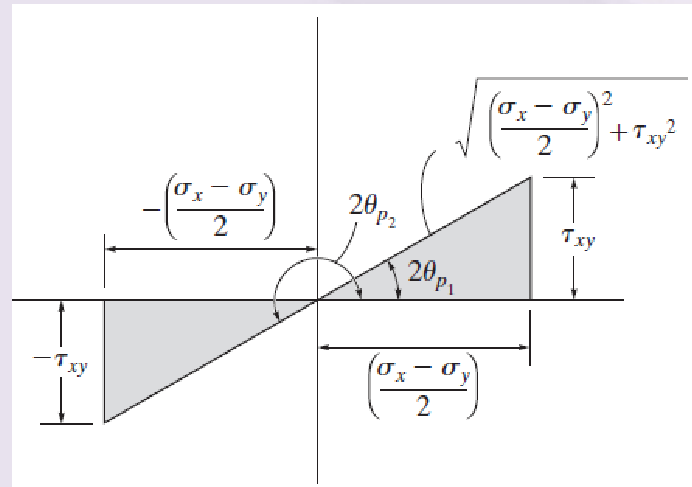


# Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no plano

## Tensões principais no plano

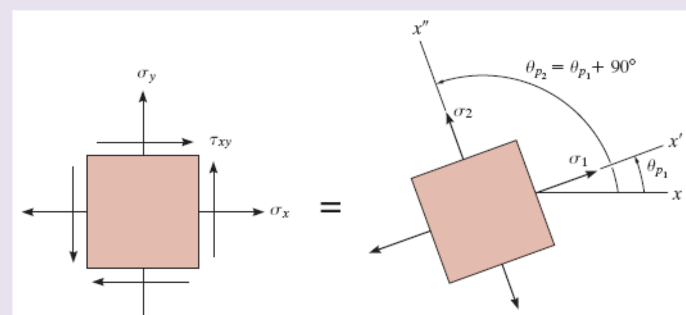
- A orientação dos planos irá determinar se a tensão normal é *máxima* ou *mínima*.

$$\mathrm{tg}\,2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$




- A solução tem duas raízes, portanto temos a tensão principal.

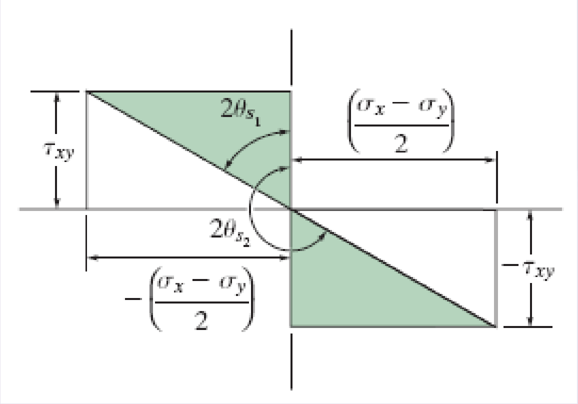
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}} \quad \text{onde } \sigma_1 > \sigma_2$$



In-plane principal stresses

## Tensão de cisalhamento máxima no plano

- A orientação de um elemento irá determinar a máxima e a mínima da tensão de cisalhamento.




$$\mathrm{tg}\,2\theta_s = \frac{-\left(\sigma_x - \sigma_y\right)/2}{\tau_{xy}}$$

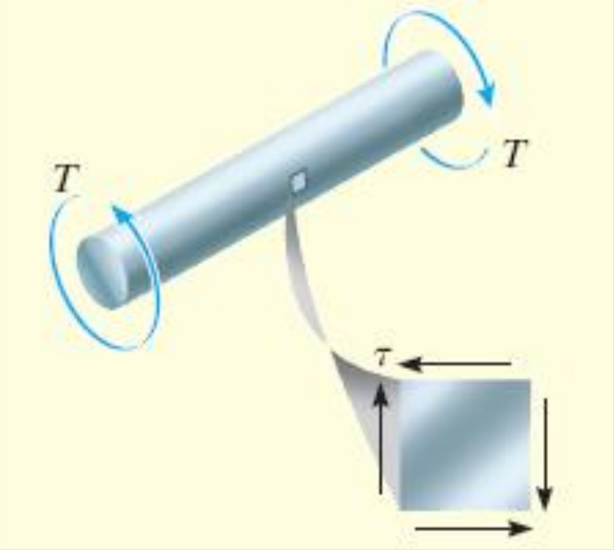
- A solução possui duas raízes, portanto nós temos ***tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média***.

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

# Exemplo 9.3

Quando a carga de torção *T* é aplicada à barra, ela produz um estado de tensão de cisalhamento puro no material. Determine (a) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada, e (b) as tensões principais.



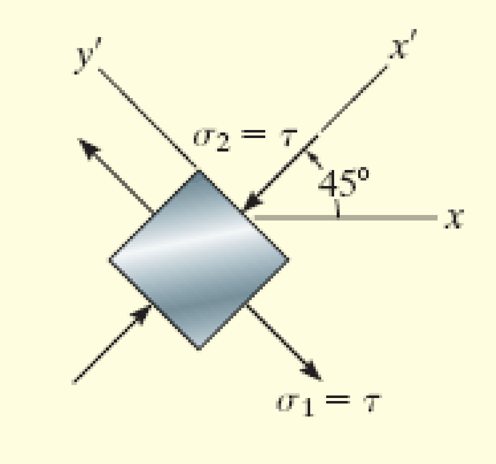
**Solução:**

Pela convenção de sinal definida $\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\tau$ .

a) Tensão de cisalhamento máxima é

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \pm\tau \qquad \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0 \quad \text{(Resposta)}$$

b) Para tensões principais,

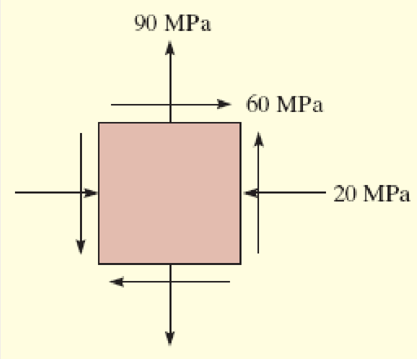



$$\text{tg}2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \Rightarrow \sigma_{p2} = 45°, \sigma_{p1} = 135°$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \pm\tau \quad \text{(Resposta)}$$

# Exemplo 9.4

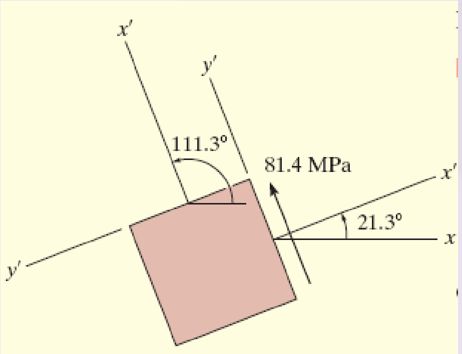
O estado plano de tensão em um ponto sobre um corpo é representado no elemento mostrado na figura abaixo. Represente esse estado de tensão como a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada.



**Solução:**

Como $\sigma_x = -20, \sigma_y = 90, \tau_{xy} = 60$, temos

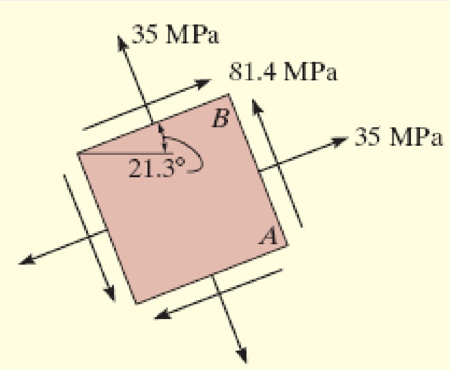
$$\text{tg}2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \Rightarrow \sigma_{s2} = 21{,}3°, \sigma_{s1} = 111{,}3°$$




A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média é

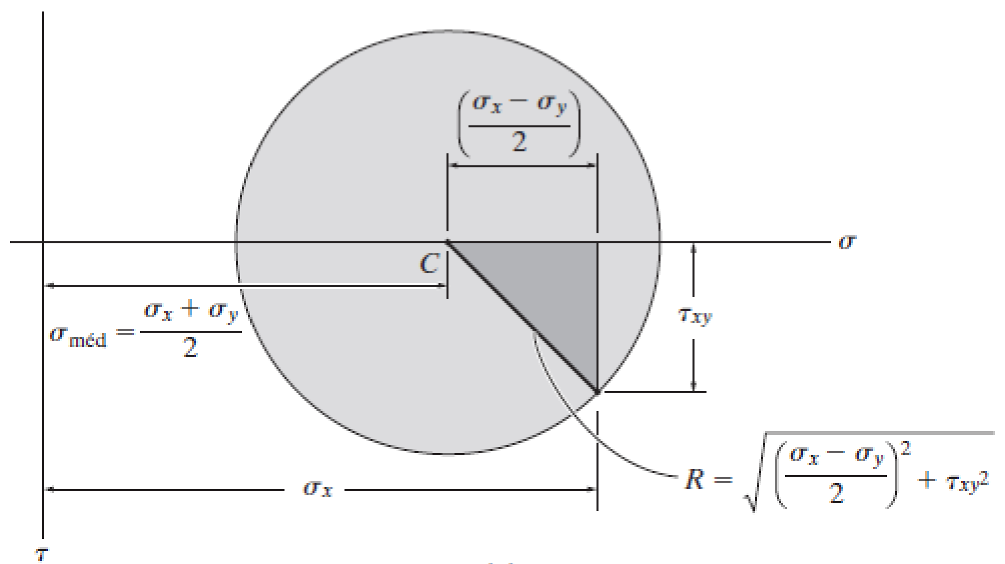
$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}} = 81{,}4\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 35\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



# Círculo de Mohr — tensão no plano

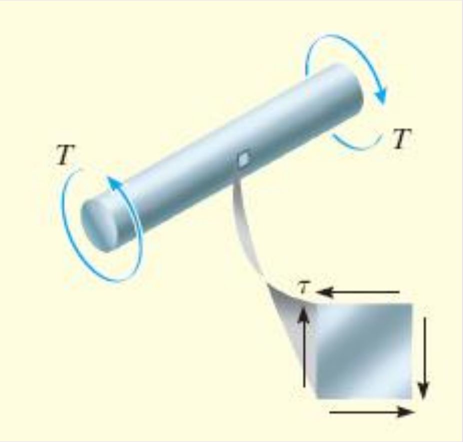
- A transformação da tensão no plano têm uma solução gráfica que é fácil de lembrar.



(b)

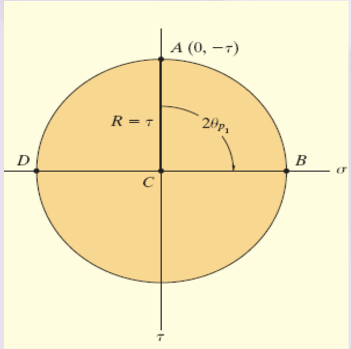
# Exemplo 9.5

A carga de torção *T* produz o estado de tensão no eixo como mostrado na figura abaixo. Construa o círculo de Mohr para esse caso.



**Solução:**

Primeiro desenhamos o círculo, $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = -\tau$

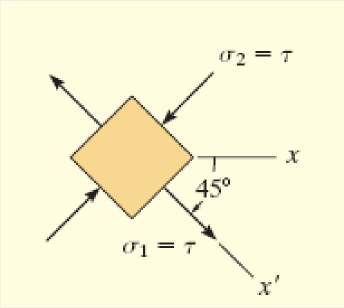



O centro do círculo *C* está no eixo em

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0$$

O ponto *A* representa um ponto de tensão normal média e tensão de cisalhamento máxima no plano. Assim,

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{no plano}}} = -\tau \quad , \quad \sigma_{\text{méd}} = 0$$

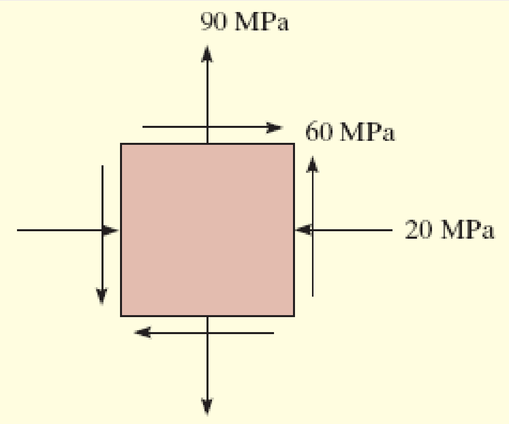



As tensões principais são identificadas como os pontos *B* e *D* no círculo. Assim,

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau$$

## Exemplo 9.6

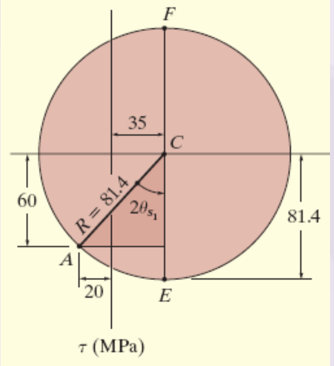
O estado plano de tensão em um ponto é mostrado no elemento na figura abaixo. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano e a orientação do elemento sobre o qual ela age.



**Solução:**

Primeiro, desenhamos o círculo, $\sigma_x = -20, \sigma_y = 90$ e $\tau_{xy} = 60$.

O centro do círculo *C* está no eixo em .



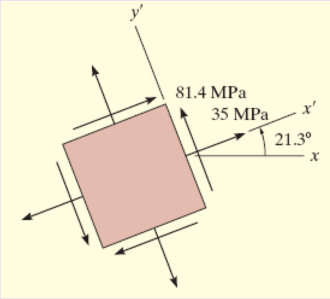

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{-20+90}{2} = 35\,\text{MPa}$$

O ponto *C* e o ponto de referência *A*(-20, 60) estão marcados. Temos:

$$R = \sqrt{60^2 + 55^2} = 81{,}4\,\text{MPa}$$

A tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média são

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}} = 81{,}4\,\text{MPa} \quad , \ \sigma_{\text{méd}} = 35\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

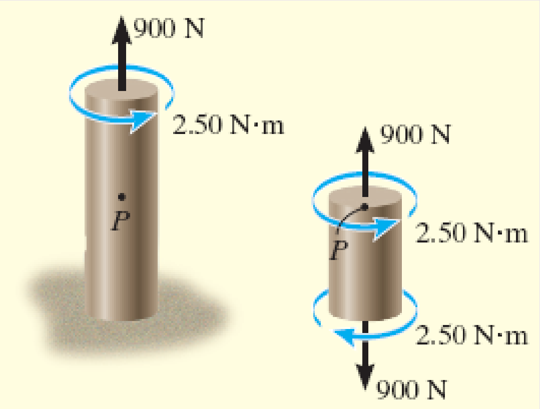



O ângulo em sentido *anti-horário* é

$$2\theta_{s_1} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{20+35}{60}\right) \Rightarrow 21{,}3° \quad \text{(Resposta)}$$

# Exemplo 9.7

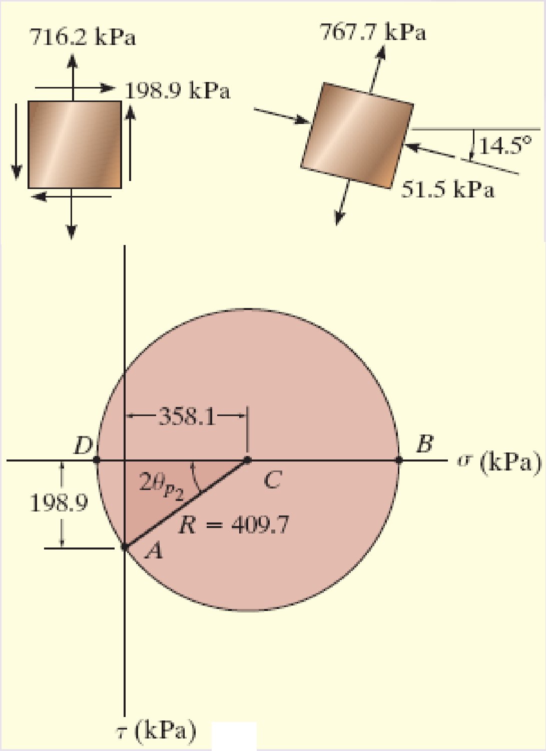
Uma força axial de 900 N e um torque de 2,5 Nm são aplicados ao eixo. O diâmentro do eixo for de 40 mm, determine as tensões principais em um ponto *P* sobre sua superfície.



**Solução:**

As tensões produzidas no ponto *P* são

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{2{,}5(0{,}02)}{\frac{\pi}{2}(0{,}02)^4} = 198{,}9\ \text{kPa}, \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{900}{\pi(0{,}02)^2} = 716{,}2\ \text{kPa}$$




As tensões principais podem ser determinadas pelo círculo de Mohr:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{0 + 716{,}2}{2} = 358{,}1\ \text{kPa}$$

As tensões principais estão representadas pelos pontos *B* e *D*, portanto

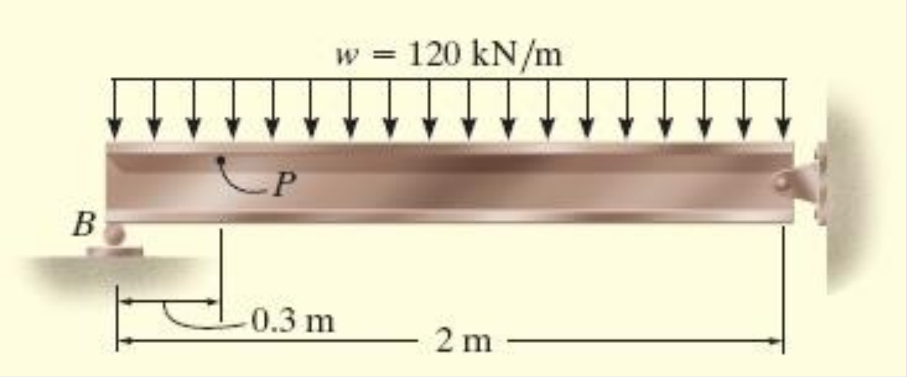
$$\sigma_1 = 358{,}1 + 409{,}7 = 767{,}7\ \text{kPa} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\sigma_2 = 358{,}1 - 409{,}7 = -51{,}5\ \text{kPa} \quad \text{(Resposta)}$$

# Exemplo 9.8

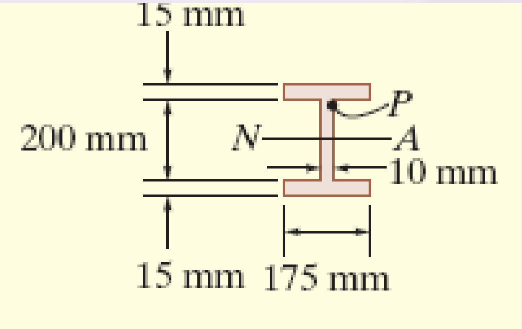
A viga mostrada está sujeita ao carregamento distribuído $w$ = 120 kN/m. Determine as tensões principais na viga no ponto $P$, que se encontra na parte superior da alma. Despreze o tamanho dos filetes e as concentrações de tensão nesse ponto.

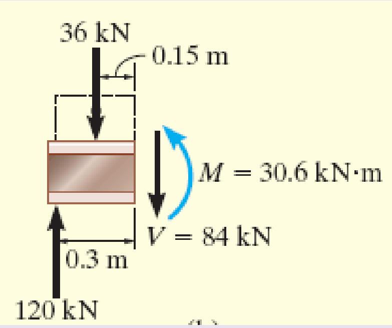
$I = 67{,}4(10^{-6})\ \text{m}^4$.



**Solução:**

O equilíbrio da viga selecionada é mostrado onde $V = 84\,\text{kN}$ $M = 30{,}6\,\text{kNm}$



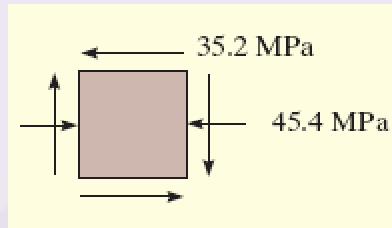




No ponto *P*,

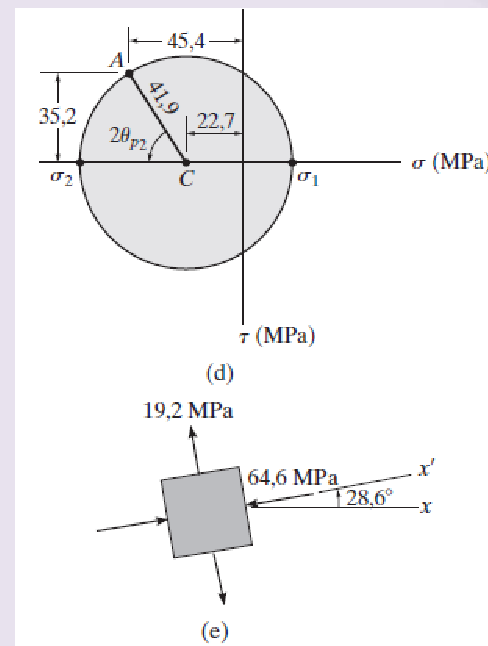
$$\sigma = \frac{-My}{I} = \frac{30{,}6\left(10^3\right)0{,}1}{67{,}4\left(10^{-6}\right)} = -45{,}4 \quad \text{(Resposta)}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{84\left[(0{,}1075)(0{,}175)(0{,}015)\right]}{67{,}4\left(10^{-6}\right)(0{,}01)} = 35{,}2\ \text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

Portanto, o resultado é o seguinte:




O centro do círculo é $\dfrac{-45{,}4+0}{2}=-22{,}7$ e o ponto A é (–45,4, –32,5).




Portanto, o raio é calculado como 41,9, e as tensões principais são

$$\sigma_1=(41{,}9-22{,}7)=19{,}2\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2=-(22{,}7+41{,}9)=-64{,}6\ \text{MPa}$$

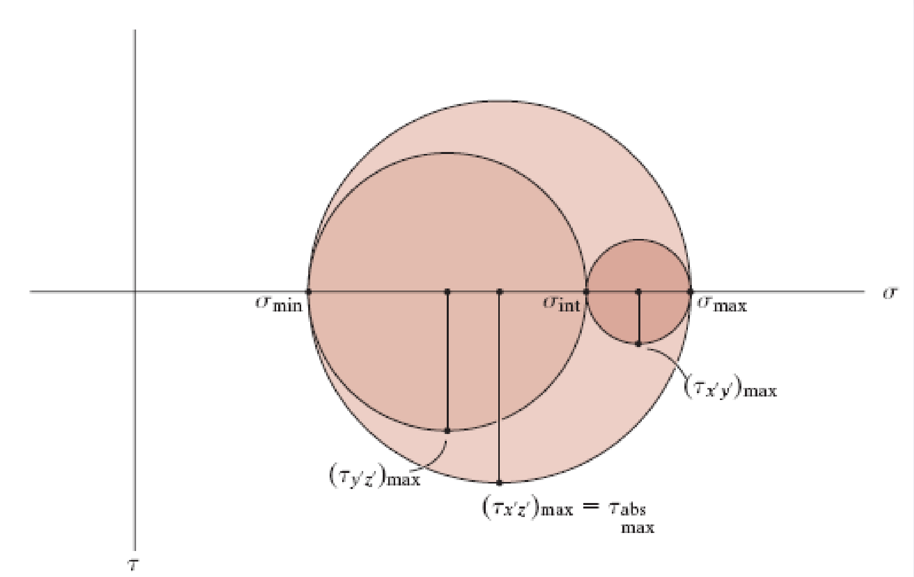
O ângulo em sentido anti-horário é

$$2\theta_{p2}=57{,}2^\circ \Rightarrow \theta_{p2}=28{,}6^\circ$$

# Tensão de cisalhamento máxima absoluta

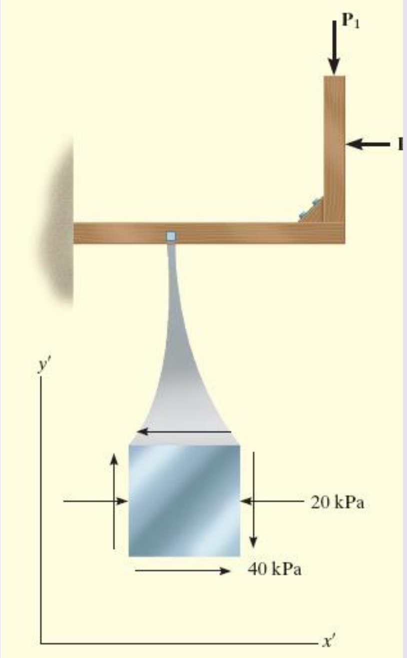
- A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média associada podem também ser localizadas usando o círculo de Mohr.

$$\tau_{\text{abs max}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \qquad \sigma_{avg} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$



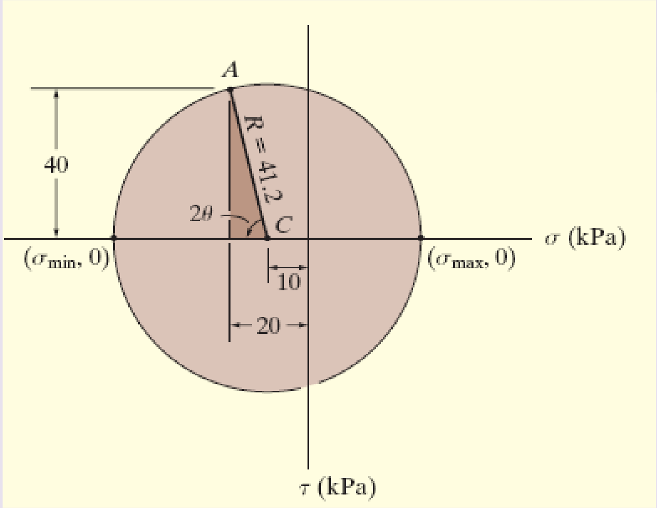
# Exemplo 9.9

Devido ao carregamento aplicado, o elemento no ponto sobre a estrutura está sujeito ao estado plano de tensão mostrado na figura. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta no ponto.



**Solução:**

O centro do círculo é $\sigma_{\text{méd}} = \dfrac{-20+0}{2} = -10\,\text{kPa}$



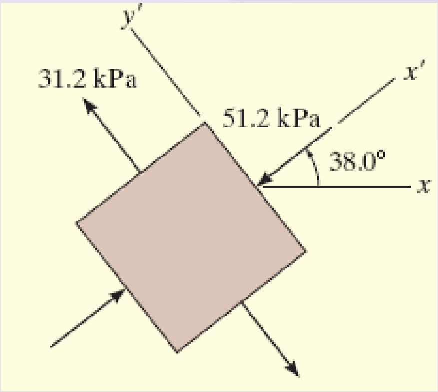

O ponto de referência é A (–20, –40).

O raio é $R = \sqrt{(20-10)^2 + 40^2} = 41{,}2\,\text{kPa}$

Portanto, o círculo de Mohr é desenhado de acordo.

As tensões principais encontram-se nos pontos onde o círculo intercepta o eixo $\sigma$:

$$\sigma_{\text{máx}} = -10 + 41{,}2 = 31{,}2\ \text{kPa}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -10 - 41{,}2 = -51{,}2\ \text{kPa}$$




Pelo círculo, o ângulo *anti-horário* é $2\theta = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{40}{20-10}\right) \Rightarrow \theta = 38{,}0°$

Como não há nenhuma tensão principal no elemento na direção z, temos

$$\sigma_{\text{máx}} = 31{,}2\ \text{kPa},\ \ \sigma_{\text{int}} = 0,\ \ \sigma_{\text{mín}} = 51{,}2\ \text{kPa}\ \ \text{(Resposta)}$$

Para tensão de cisalhamento máxima absoluta,

$$\tau_{\substack{\text{abs}\\ \text{máx}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} = \frac{31{,}2 - (-51{,}2)}{2} = 41{,}2 \text{ kPa} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2} = \frac{31{,}2 - 51{,}2}{2} = -10 \text{ kPa} \quad \text{(Resposta)}$$