Características Geométricas

Para o dimensionamento de peças estruturais, é imprescindível a determinação das 'características geométricas' das seções transversais das mesmas. Sem esse mecanismo determinante da capacidade portante das estruturas, não se consegue dimensionar os componentes da estrutura, tão pouco se verificar a estabilidade individual e global das estruturas analisadas. Dessa maneira, temos como 'características geométricas' principais os seguintes tópicos:

a) Área
b) Centro de Gravidade
c) Momento de Inércia

Figuras Planas:

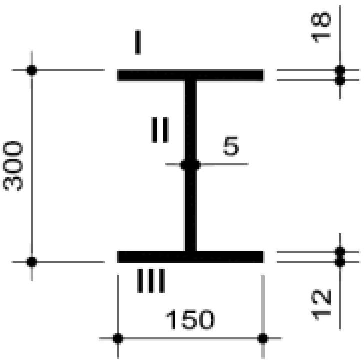
Convencionalmente, a primeira etapa para determinação das características geométricas de Figuras Planas, é a cálculo do Momento Estático ou Momento de 1.ª Ordem – sempre a análise da seção transversal de um determinado componente estrutural será efetuado através da figura plana equivalente a essa seção, seja um perfil tipo 'I', 'U', 'L', etc. A definição da Resistência dos Materiais para esse Momento Estático de uma figura em relação a um eixo de seu plano, é uma grandeza definida como a somatória dos produtos de cada elemento de área da figura pela respectiva distância ao eixo. A utilidade do Momento Estático é determinar o Centro de Gravidade das figuras planas e, se a figura for constituída de várias outras, o Momento Estático total é a soma dos Momentos Estáticos das várias figuras.
Entretanto, para chegar-se ao cálculo desse Momento Estático, é necessário antes, determinar-se outras características geométricas, pois a equação matemática desse Momento é: $M_{sx} = A \times Y_g$ ou $M_{sy} = A \times X_g$, onde:

A = Área da Seção Transversal;
Y_g = distância do Centro de Gravidade da seção em relação ao eixo X;
X_g = distância do Centro de Gravidade da seção em relação ao eixo Y.

Cálculo da Área:

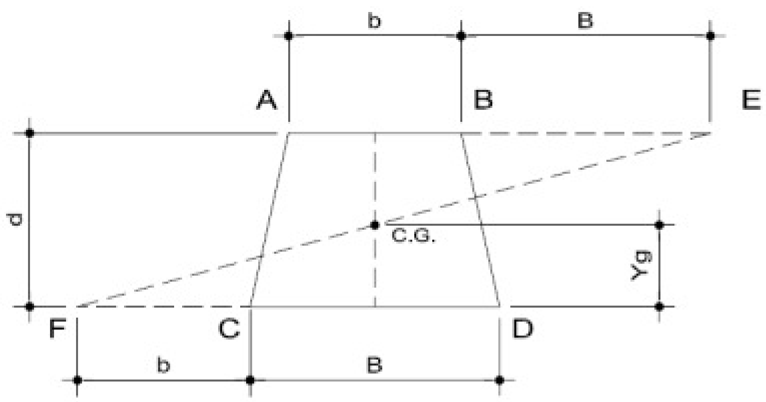
As equações determinantes para o cálculo de áreas pertencem à Resistência dos Materiais, cabendo no presente curso, apenas as suas deduções principais.
Assim, para facilitar o cálculo de área de figuras planas, o melhor meio é o de se desmembrar a figura plana em estudo em figuras geométricas cujas áreas são conhecidas.

a) Cálculo de Área de um perfil ' I ' Soldado
Área Total = $A_I + A_{II} + A_{III}$
A = (18x150) + (270x5) + (12x150)
A = 5.850 mm^2 ou 58,50 cm^2



Cálculo do Centro de Gravidade:

Uma vez determinada a área de uma certa seção transversal, tal qual a que vimos acima, a próxima etapa deverá ser a determinação do Centro de Gravidade dessa seção ou figura plana. Considerando que todo corpo é atraído pela 'gravidade' para o centro da Terra, e que o peso de um corpo é uma força cuja intensidade é a medida do produto da massa pela aceleração provocada pela gravidade, os pesos de todas as moléculas de um corpo formam um sistema de foças verticais, cuja resultante é o peso do corpo e cujo centro de forças é o centro de gravidade. No caso de figuras planas, para se determinar o centro de gravidade da seção, assim como se trabalhou com o cálculo de área, divide-se a mesma figura em outras tantas figuras conhecidas para que se possa determinar o centro de gravidade de cada figura inicialmente e, posteriormente, o cálculo do centro de gravidade da figura integral.



Se tomarmos a figura acima, um trapézio ABCD, a fim de se obter, pelo método mais simples o centro de gravidade da seção, prolonga-se na direção da base menor (AB) o comprimento maior (CD) até E, e na direção da base maior (CB) o comprimento menor (AB) até F. Unindo-se EF, esta intercepta a linha mediana traçada entre AB e CD exatamente no ponto do C.G. (Centro de Gravidade). A medida Yg, equivale à formulação matemática:

$$y_g = \frac{d}{3} \times \frac{(2b + B)}{(b + B)}$$

Quando, por exemplo, nos detivermos diante de uma figura plana de forma quadrada, supondo seus lados iguais com medida de 90 cm, ao aplicarmos a equação acima, obteremos o resultado de:

$$y_g = \frac{90}{3} \times \frac{(2 \times 90 + 90)}{(90 + 90)} = 45\,\text{cm}$$

o que equivale exatamente ao ponto desejado do Centro de Gravidade.

Entretanto, quando se trata de figura plana composta, como no caso do exemplo do cálculo de área, a determinação do Centro de Gravidade torna-se um pouco mais complexa, sem com isso tornar-se difícil. Uma vez compreendido o caminhamento lógico do cálculo, podemos determinar o C.G. da figura em questão, em relação aos seus dois eixos de figura plana, ou seja, nas direções X e Y.

Vamos voltar à figura original, agora em desenho de maiores proporções, e com o traçado dos eixos de referência ou eixos de auxilio (Xa e Ya) e, com isso, as medidas auxiliares iniciais, y_1 a y_3 e x_1 a x_3. Devemos, quando possível, tomarmos o canto inferior esquerdo das peças compostas como referencial 0,0.

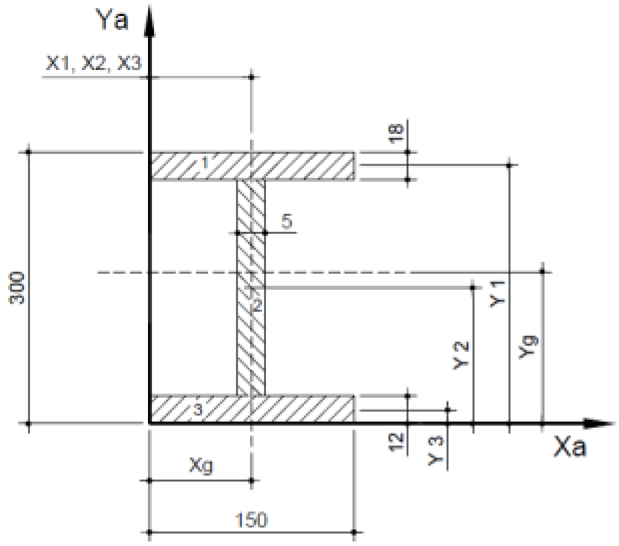


TABELA 1 PARA CÁLCULO DE FIGURAS PLANAS					
FIGURA	ÁREA (cm^2)	Y_{gi} (cm)	M_{sxi} (cm^3)	X_{gi} (cm)	$M_{sy}i$ (cm^3)
1	1,8x15 = 27	30-0,9 = 29,1	785,70	15/2 = 7,5	202,50
2	0,5x27 = 13,5	27/2+1,2 = 14,70	198,45	15/2 = 7,5	101,25
3	1,2x15 = 18	1,2/2 = 0,6	10,8	15/2 = 7,5	135
Total	58,50		994,95		438,75

Onde Y_{gi} e X_{gi}, são as distancias entre os centros de gravidade das figuras individuais conhecidas (1 a 3) até os eixos auxiliares Y_a e X_a.

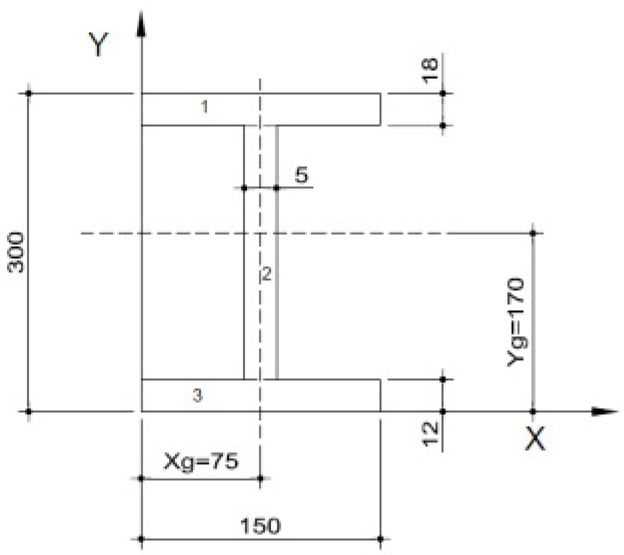
Uma vez calculados os valores auxiliares, já nos é possível determinarmos os valores finais relativos ao centro de gravidade da seção transversal, à partir das equações determinadas anteriormente, onde:

$$y_g = \frac{\sum M_{sxi}}{\sum A} \text{ e } x_g = \frac{\sum M_{syi}}{\sum A}$$

Portanto:

$$y_g = \frac{994,95}{58,50} = 17,00\,cm \qquad x_g = \frac{438,75}{58,50} = 7,50\,cm$$

O que equivale, em nossa figura, ao seguinte resultado:



Cálculo do Momento de Inércia:

Momento de Inércia ou de 2ª Ordem de uma figura plana em relação a um eixo do seu plano é a somatória dos produtos da área de cada elemento da superfície, pelo quadrado de sua distância, somado ao momento de inércia da peça isolada (Teorema de Steiner). O momento de inércia tem sempre valores positivos, pelo fato de termos o efeito, na equação, do valor da distância elevado ao quadrado, e sua representação pode ser feita através de duas letras, sem que se altere seu significado: J ou I.

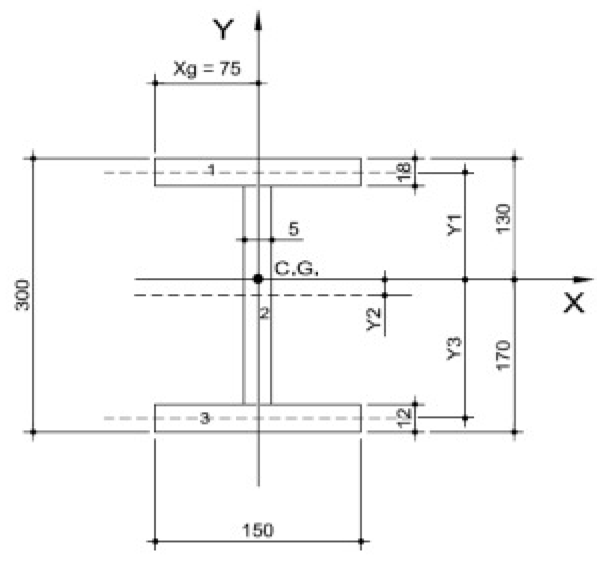
De acordo com o enunciado acima, os valores de J ou I serão:

$$J_x \text{ ou } I_x = J_{xi} + A \times Y_g^2 \text{ e } J_y \text{ ou } I_y = J_{yi} + A \times Y_g^2$$

Onde:

I = Momento de Inércia da figura;
I_i = Momento de Inércia em relação ao um eixo i, que passa pelo C.G.;
Y_i = Distância entre o centro de gravidade da figura em relação ao eixo i;
i = eixos X ou Y.

Pois bem, retomando nossa figura tradicional, vamos determinar os valores do Momento de Inércia ou de 2.ª Ordem, agora com os eixos X e Y posicionados em sua situação real, ou seja, passando pelo C.G. da peça.



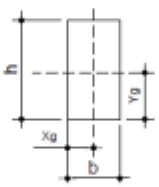
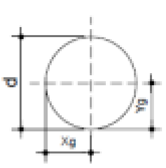
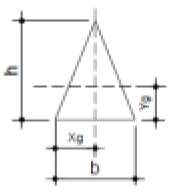
Mantendo a proposta inicial de se desmembrar a figura plana em figuras geométricas conhecidas, teremos os mesmos retângulos 1, 2 e 3. Dessa maneira podemos, nos utilizando de tabelas auxiliares, calcularmos inicialmente os momentos de inércia de cada um desses retângulos, em relação aos eixos X e Y, agora os eixos tradicionais, traçados a partir do C.G. da seção transversal.

TABELA 2 PARA CÁLCULO DE FIGURAS PLANAS					
FIGURA	A (cm^2)	I_{xi} (cm^4)	Y_{gi} (cm)	I_{yi} (cm^4)	X_{gi} (cm)
1	1,8x15 = 27	$\frac{15x1,8^3}{12} = 7,29$	12,10	$\frac{1,8x15^3}{12} = 506,3$	0
2	0,5x27 = 13,5	$\frac{0,5x27^3}{12} = 820,12$	2,30	$\frac{27x0,5^3}{12} = 0,28$	0
3	1,2x15 = 18	$\frac{15x1,2^3}{12} = 2,16$	16,40	$\frac{1,2x15^3}{12} = 337,5$	0

Onde Y_{gi} e X_{gi}, são as distâncias entre os centros de gravidade das seções individuais (1 a 3) em relação aos eixos reais Y e X.

A partir dos valores enumerados na tabela acima, já podemos definir os valores dos Momentos de Inércia.

I_x = (7,29 + 27 x 12,102) + (820,12 + 13,5 x 2,302) + (2,16 + 18 x 16,402) = 9.695 cm^4
I_y = (506,3 + 27 x 02) + (0,28 + 13,5 x 02) + (337,5 + 18 x 02) = 844 cm^4

SEÇÕES PLANAS					
FIGURA	ÁREA	C.G.	MOMENTO INÉRCIA	RAIO DE GIRAÇÃO	MOMENTO RESISTENTE
	$A = b \times h$	$x_g = \frac{b}{2}$ $y_g = \frac{h}{2}$	$I_x = \frac{b \times h^3}{12}$ $I_y = \frac{h \times b^3}{12}$	$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$	$W_x = \frac{b \times h^2}{6}$ $W_y = \frac{h \times b^2}{6}$
	$A = \frac{\pi \times d^2}{4}$	$x_g = \frac{d}{2}$ $y_g = \frac{d}{2}$	$I = \frac{\pi \times d^4}{64}$	$r_x = \frac{d}{4}$ $r_y = \frac{d}{4}$	$W = \frac{\pi \times d^3}{32}$
	$A = \frac{b \times h}{2}$	$x_g = \frac{b}{2}$ $y_g = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{b \times h^3}{36}$ $I_y = \frac{h \times b^3}{36}$	$r_x = 0,23 \times h$ $r_y = 0,23 \times b$	$W_x = \frac{b \times h^2}{24}$ $W_y = \frac{h \times b^2}{24}$