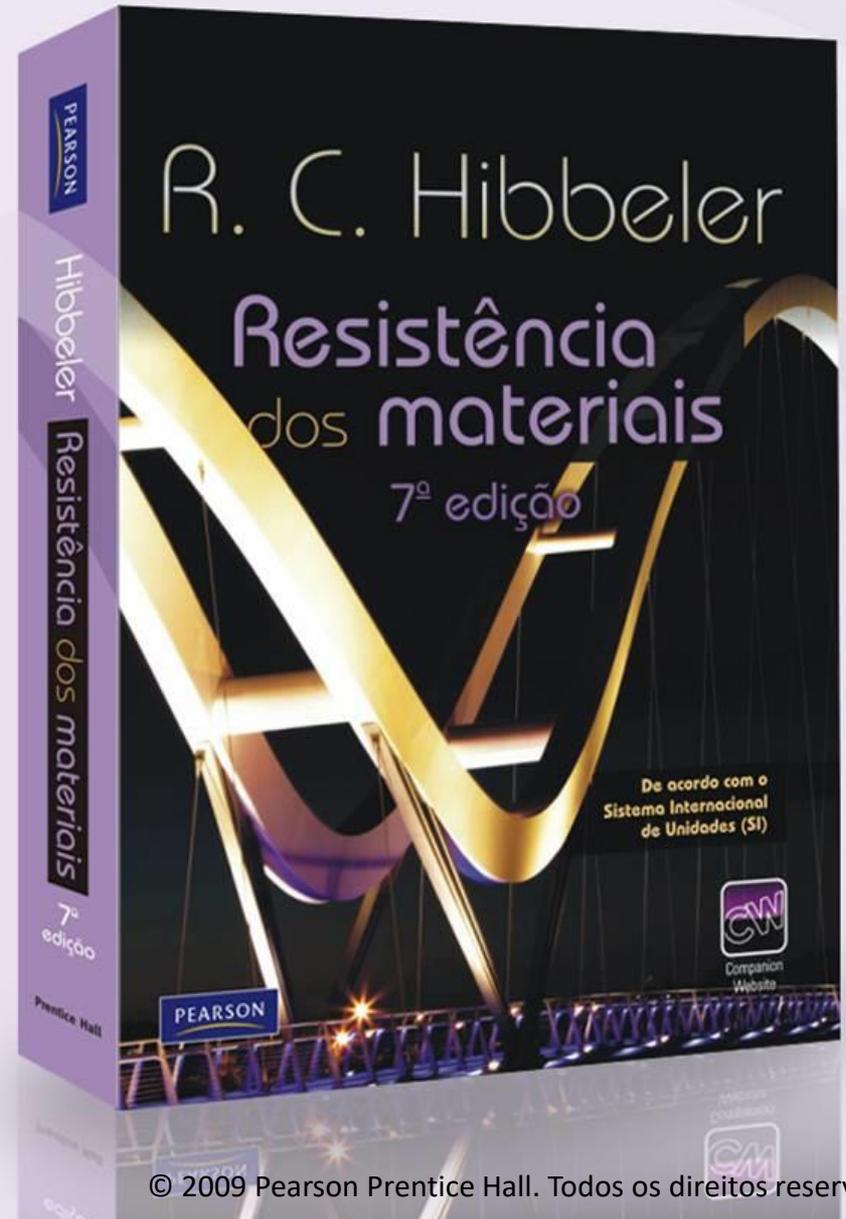


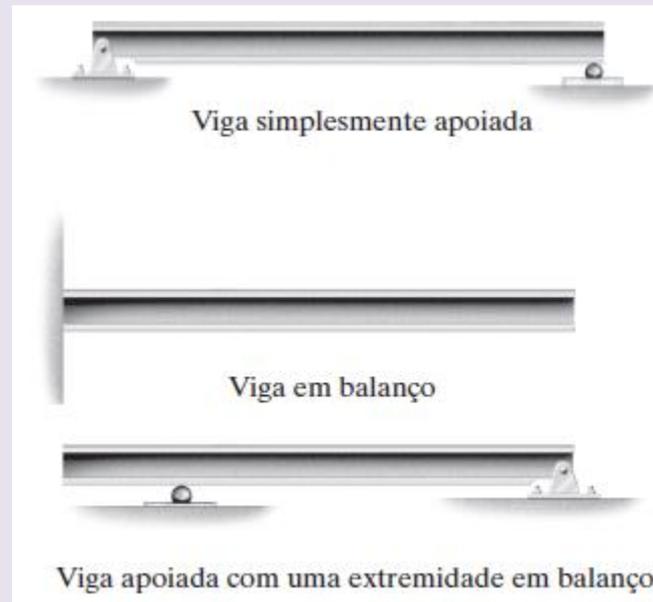
Capítulo 7

# Flexão

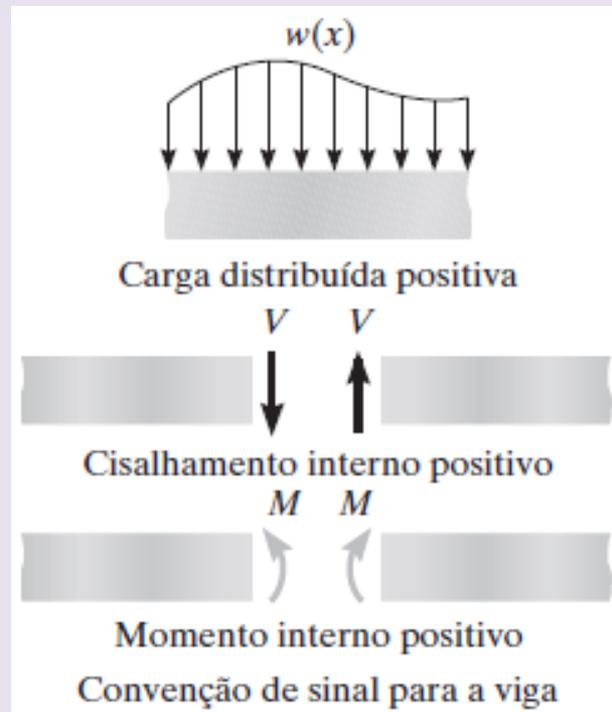


## Diagramas de força cortante e momento fletor

- Elementos longos e retos que suportam cargas perpendiculares a seu eixo longitudinal são denominados *vigas*.
- Vigas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas.

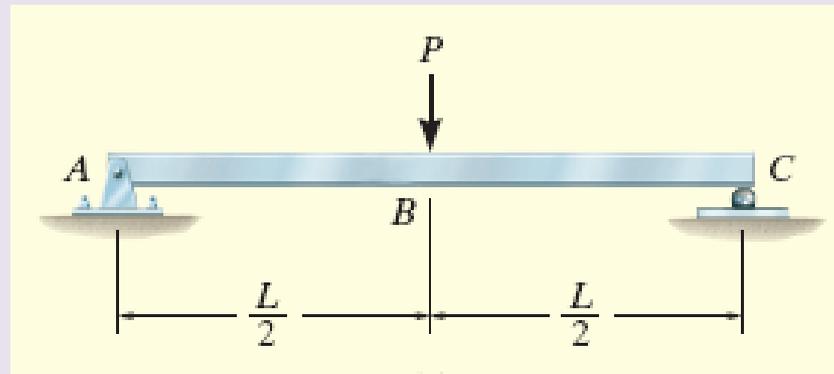


- As funções de *cisalhamento e momento* podem ser representadas em gráficos denominados **diagramas de força cortante e momento fletor**.
- *Direções positivas* indicam que a *carga distribuída* age para *baixo* na viga e a força cortante interna provoca uma rotação em sentido horário.



## Exemplo 6.1

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga dada.

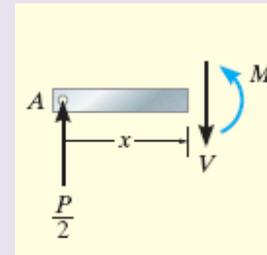


## Solução:

Um diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado abaixo. A aplicação das equações de equilíbrio produz

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V = \frac{P}{2} \quad (1)$$

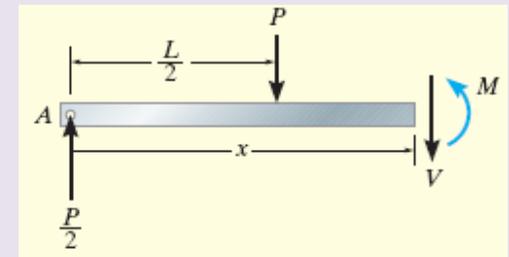
$$+\uparrow \sum M = 0; \quad M = \frac{P}{2} x \quad (2)$$



Segmento esquerdo da viga se estende até a distância  $x$  na região  $BC$ .

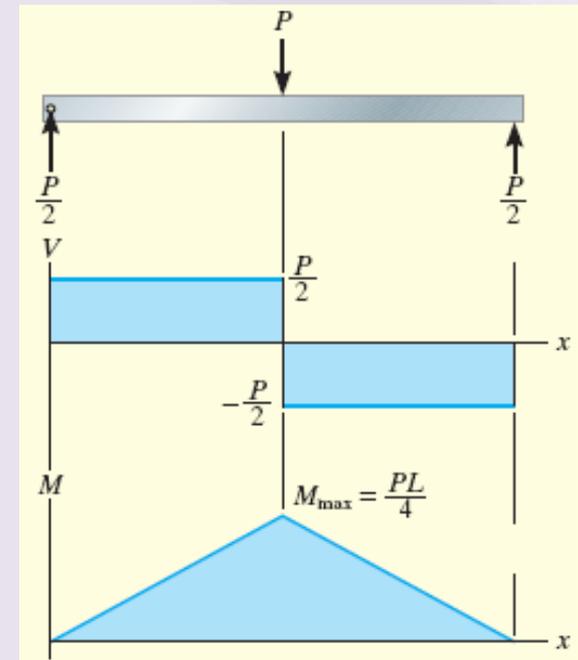
$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \Rightarrow V = -\frac{P}{2} \quad (3)$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0; \quad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x \Rightarrow M = \frac{P}{2}(L - x) \quad (4)$$



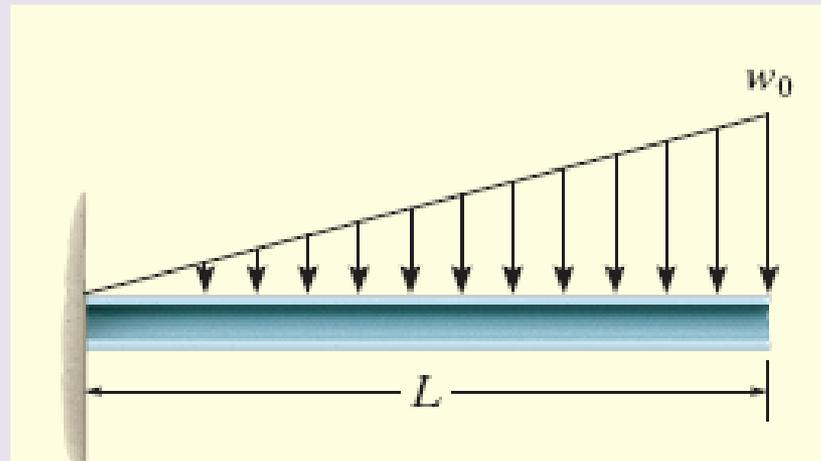
O diagrama de força representa as equações 1 e 3 →

O diagrama de momento representa as equações 2 e 4 →



## Exemplo 6.2

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na figura.

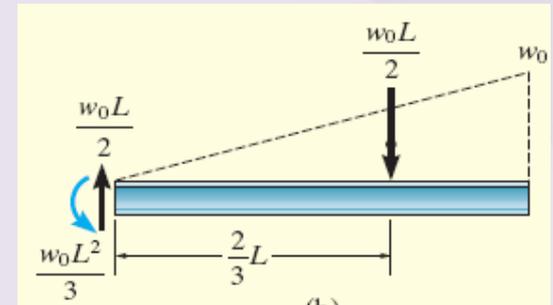


## Solução:

A carga distribuída é substituída por sua força resultante.

A intensidade da carga triangular na seção é determinada por cálculo proporcional:

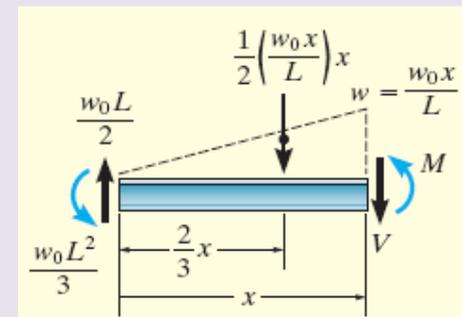
$$\frac{w}{x} = \frac{w_0}{L} \quad \text{ou} \quad w = \frac{w_0 x}{L}$$



A resultante do carregamento distribuído é determinada pela área sob o diagrama:

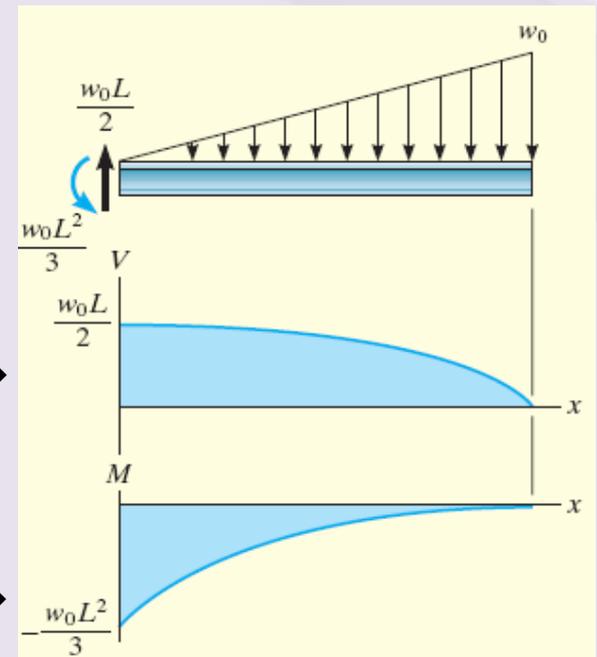
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad \frac{w_0 L}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{w_0 x}{L} \right) x - V = 0 \Rightarrow V = \frac{w_0}{2L} (L^2 - x^2) \quad (1)$$

$$+\curvearrowright \sum M = 0; \quad \frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2} (x) + \frac{1}{2} \left( \frac{w_0 x}{L} \right) x \left( \frac{1}{3} x \right) + M = 0 \quad (2)$$



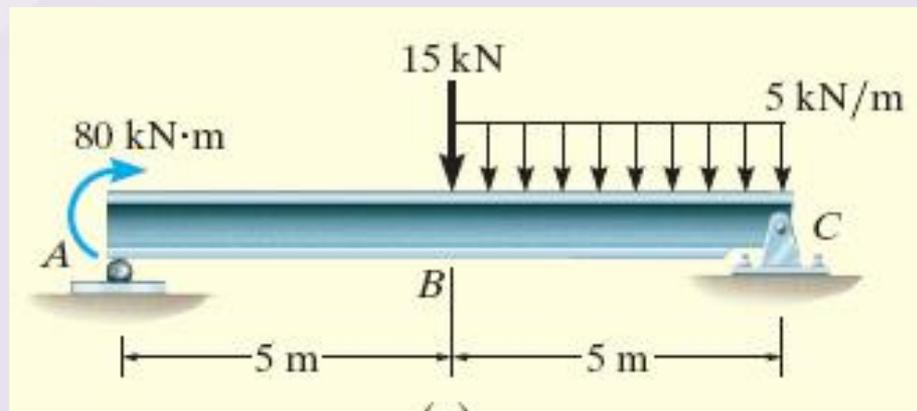
O diagrama de força cortante representa a equação 1 →

Momento fletor representa a equação 2 →



## Exemplo 6.3

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada ao lado.



## Solução:

Duas regiões de  $x$  devem ser consideradas para se descreverem as funções de cisalhamento e momento da viga inteira.

$$0 \leq x_1 < 5 \text{ m},$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5,75 - V = 0 \Rightarrow V = 5,75 \text{ kN} \quad (1)$$

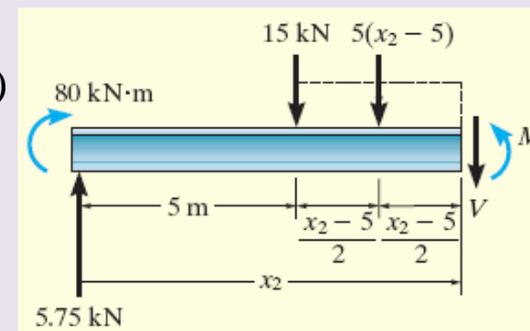
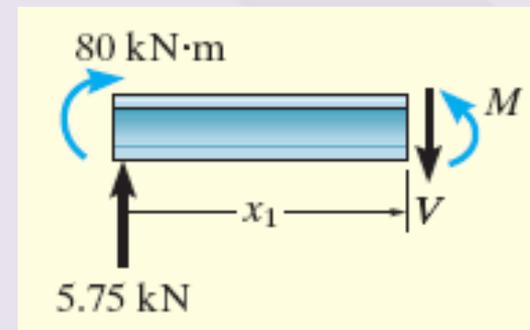
$$+\curvearrowright \sum M = 0; \quad -80 - 5,75x_1 + M = 0 \Rightarrow M = (5,75x_1 + 80) \text{ kNm} \quad (2)$$

$$5 \text{ m} \leq x_2 < 10 \text{ m},$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5,75 - 15 - 5(x_2 - 5) - V = 0 \Rightarrow V = (15,75 - 5x_2) \text{ kN} \quad (3)$$

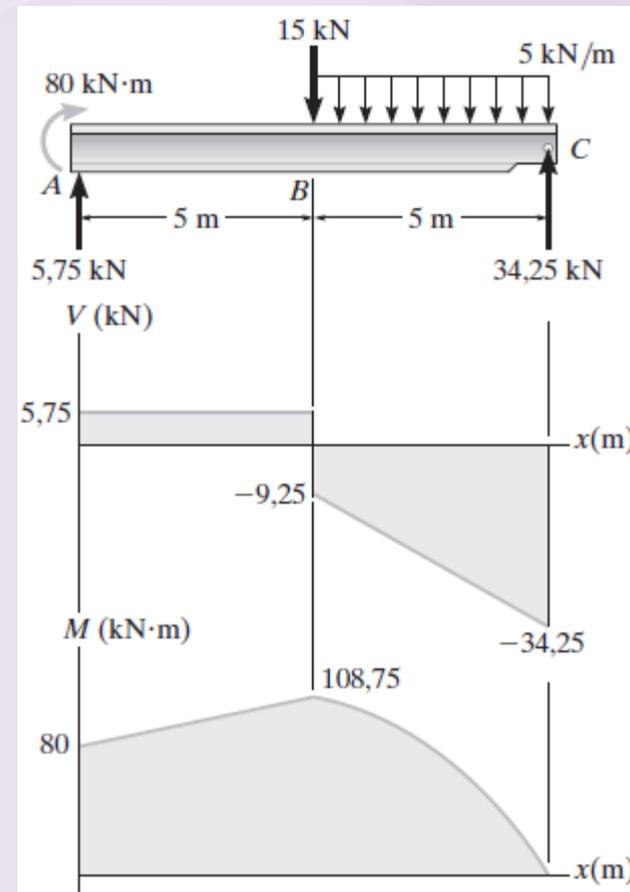
$$+\curvearrowright \sum M = 0; \quad -80 - 5,75x_2 + 15(x_2 - 5) + 5(x_2 - 5) \left( \frac{x_2 - 5}{2} \right) + M = 0$$

$$M = (-2,5x_2^2 + 15,75x_2 + 92,5) \text{ kNm} \quad (4)$$



O diagrama de força cortante representa as equações 1 e 3 →

O momento fletor das equações 2 e 4 →



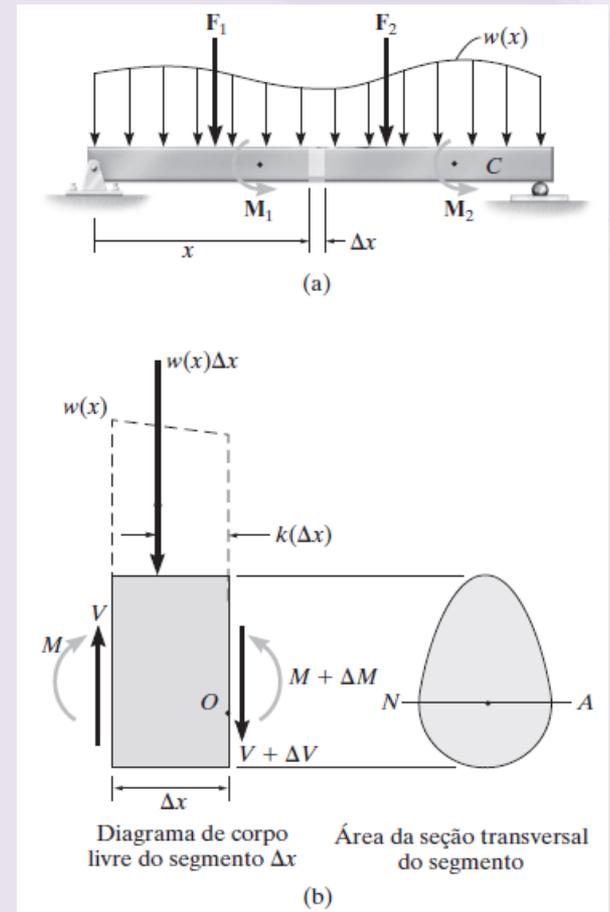
## Método gráfico para construir diagramas de força cortante e momento fletor

### Regiões de carga distribuída

- Essas duas equações proporcionam um meio conveniente para se obter rapidamente os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga:

inclinação do diagrama de força cortante em cada ponto  $\frac{dV}{dx} = -w(x)$  –intensidade da carga distribuída em cada ponto

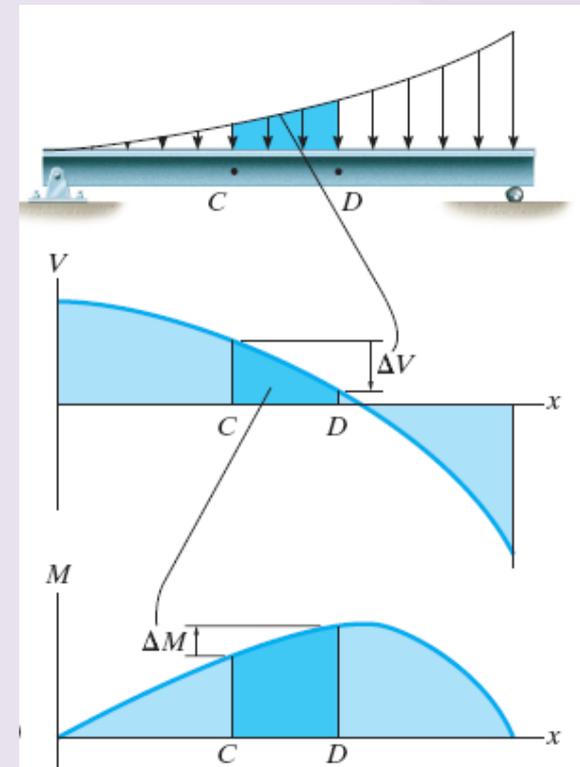
inclinação do diagrama de momento em cada ponto  $\frac{dM}{dx} = V$  cisalhamento(força cortante) em cada ponto



- Podemos integrar essas áreas entre quaisquer dois pontos para mudar a carga distribuída e a força cortante.

mudança na  
força cortante  $\Delta V = -\int w(x)dx$  -área sob a  
carga distribuída

mudança no  
momento  $\Delta M = \int V(x)dx$  área sob o  
diagrama de força  
cortante



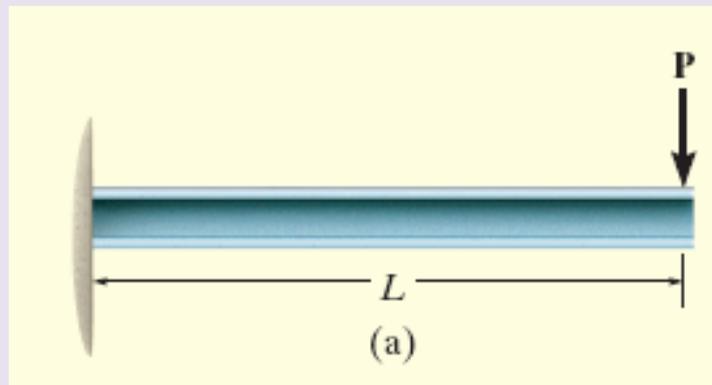
### Regiões de força e momento concentrados

- Alguns dos casos comuns de carregamento:

Carregamento	Diagrama de força cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de momento $\frac{dM}{dx} = V$
	<p>Força <b>P</b> para baixo faz <math>V</math> saltar para baixo de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>	<p>Inclinação constante muda de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>
	<p>Nenhuma mudança na força cortante, já que a inclinação <math>w = 0</math>.</p>	<p>Inclinação positiva constante. <math>M_0</math> em sentido anti-horário faz <math>M</math> saltar para baixo.</p>
	<p>Inclinação negativa constante.</p>	<p>Inclinação positiva que decresce de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>
	<p>Inclinação negativa que aumenta de <math>-w_1</math> a <math>-w_2</math>.</p>	<p>Inclinação positiva que decresce de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>
	<p>Inclinação negativa que decresce de <math>-w_1</math> a <math>-w_2</math>.</p>	<p>Inclinação positiva que decresce de <math>V_1</math> para <math>V_2</math>.</p>

## Exemplo 6.4

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



**Solução:**

As reações são mostradas no diagrama de corpo livre ao lado:

De acordo com a convenção de sinal, em  $x = 0$ ,  $V = +P$  e em  $x = L$ ,  $V = -P$ .



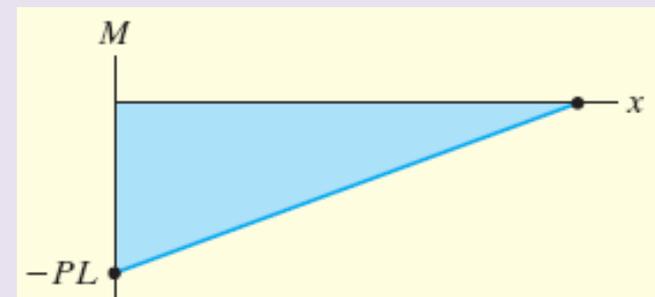
Visto que  $w = 0$ , a *inclinação* do diagrama de força cortante será zero, portanto:

$$dV/dx = -w = 0 \text{ em todos os pontos}$$

Para o diagrama de força cortante de acordo com a convenção de sinal, em  $x = 0$ ,  $M = -PL$  e em  $x = L$ ,  $M = 0$ .

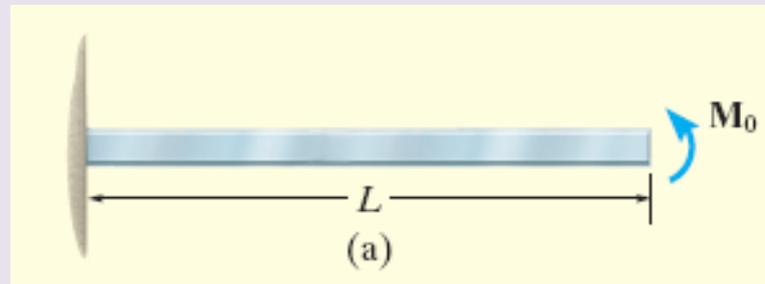
O diagrama de força cortante indica que o cisalhamento é positivo constante. Portanto,

$$dM/dx = V = +P \text{ em todos os pontos}$$



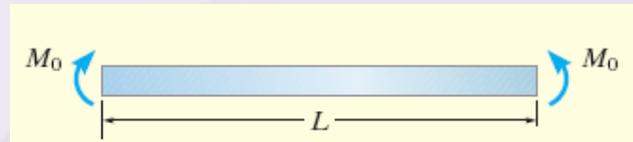
## Exemplo 6.5

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.

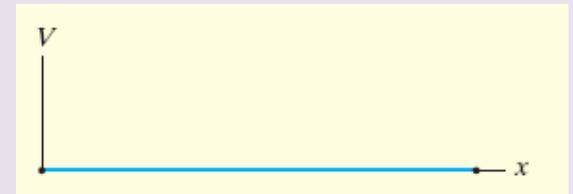


## Solução:

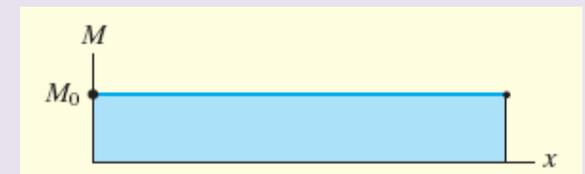
A reação no apoio fixo é mostrada no diagrama de corpo livre:



Visto que não existe nenhuma carga distribuída na viga, o diagrama de força cortante terá *inclinação* nula em todos os pontos.

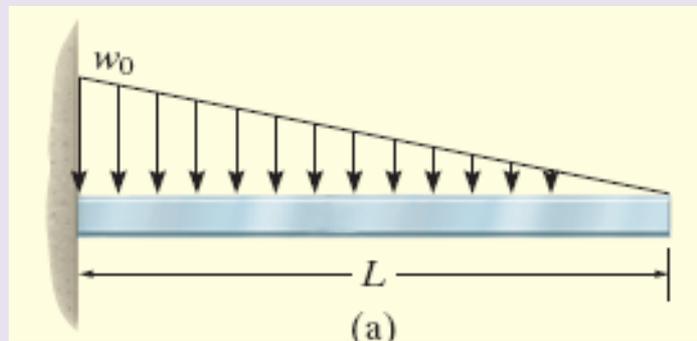


Pelo diagrama de força cortante, a *inclinação* do diagrama de momento será nula.  $V = 0$ .



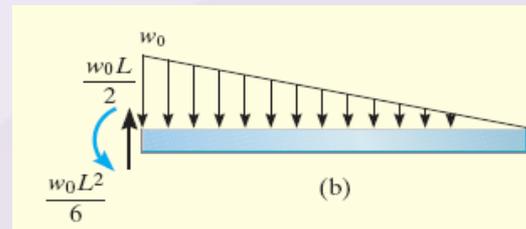
## Exemplo 6.6

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.

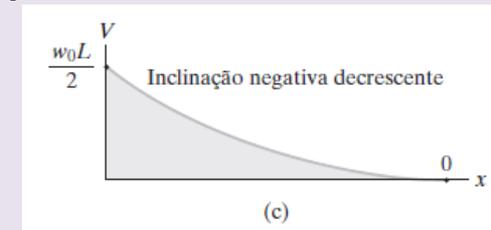


## Solução:

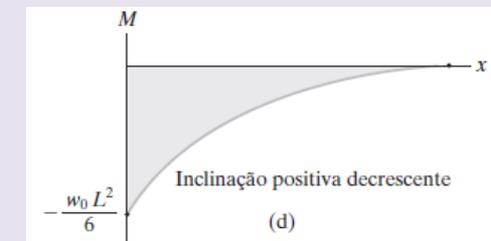
A reação nos apoios foram calculadas e são mostradas no diagrama de corpo livre:



A carga distribuída na viga é positiva, porém decrescente. Portanto, a inclinação é negativa decrescente.

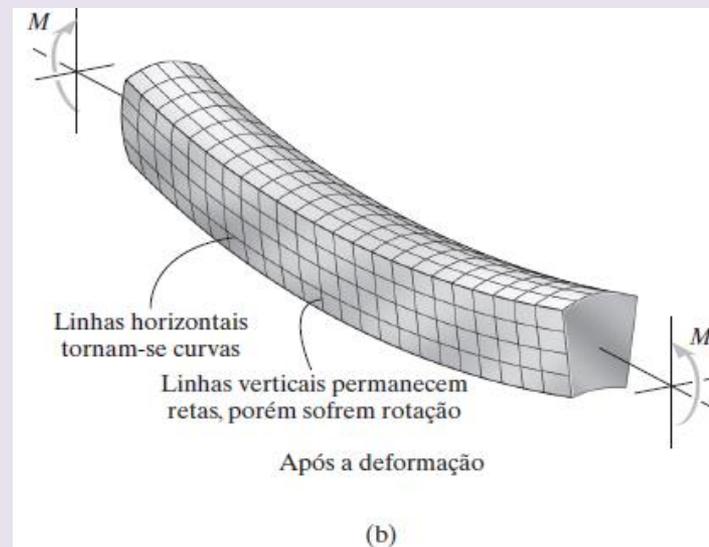
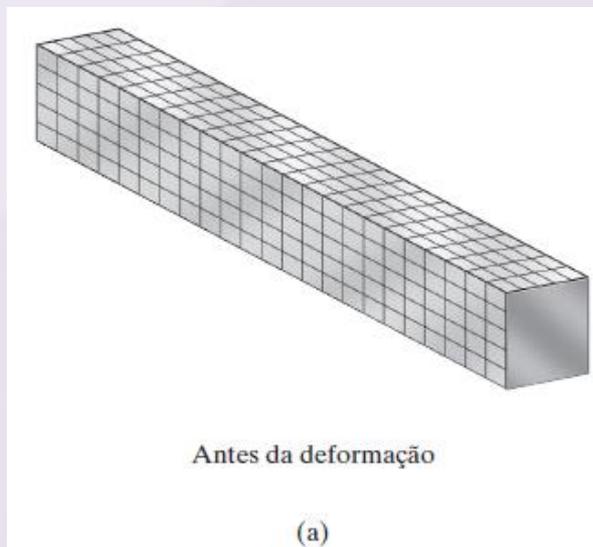


A curva do diagrama de momento que apresenta esse comportamento de inclinação é uma função *cúbica* de  $x$ .

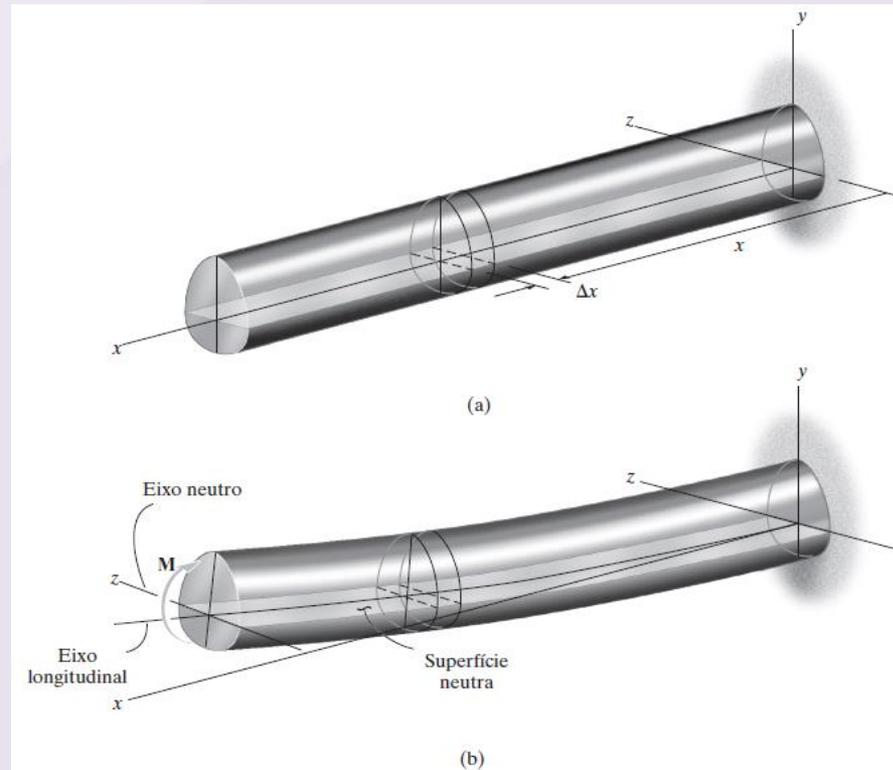


## Deformação por flexão de um elemento reto

- A seção transversal de uma viga reta *permanece plana* quando a viga se deforma por flexão.
- Isso provoca uma tensão de tração de um lado da viga e uma tensão de compressão do outro lado.



- A *deformação longitudinal varia linearmente* de zero no eixo neutro.
- A lei de Hooke se aplica quando o material é homogêneo.
- O eixo neutro passa pelo *centroide* da área da seção transversal.



## A fórmula da flexão

- O momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição linear da tensão normal em torno do eixo neutro.

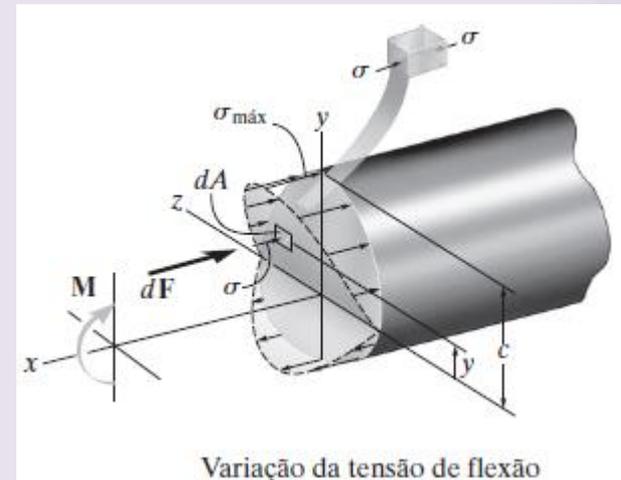
$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$\sigma$  = tensão normal no membro

$M$  = momento interno

$I$  = momento de inércia

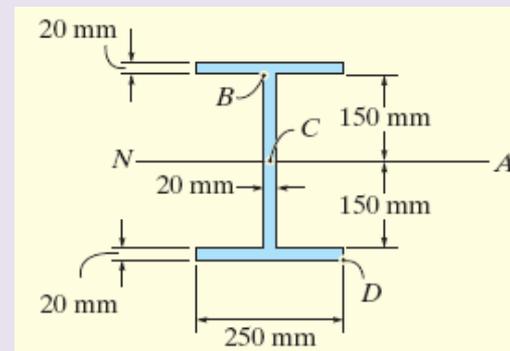
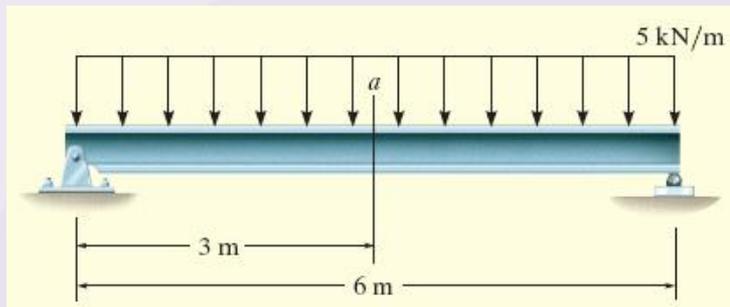
$y$  = distância perpendicular do eixo neutro



- Pela regra da mão direita, o sinal negativo é compressivo já que age na direção negativa de  $x$ .

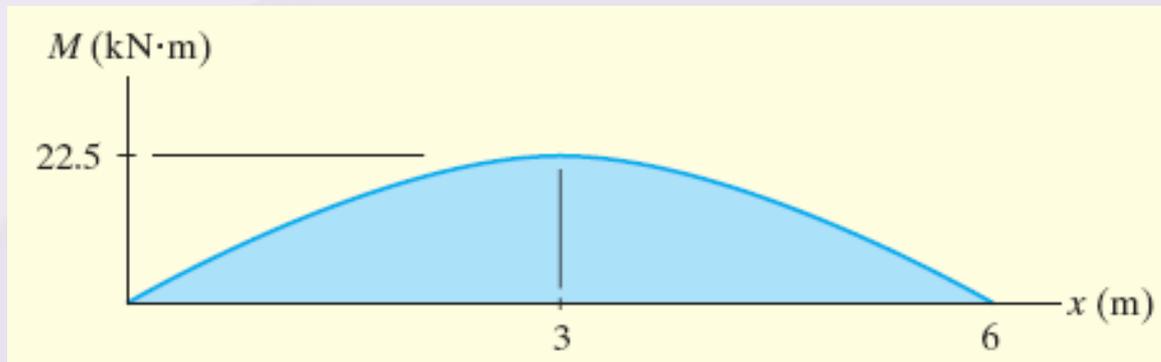
## Exemplo 6.8

A viga simplesmente apoiada tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



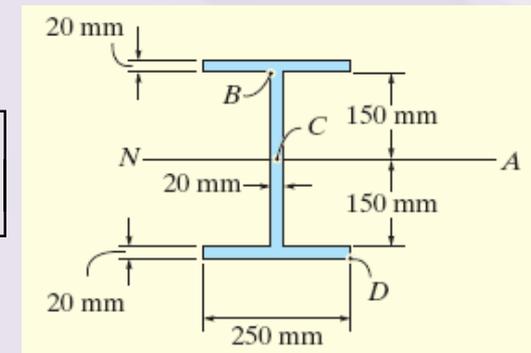
**Solução:**

O momento máximo interno na viga é  $M = 22,5 \text{ kNm}$ .



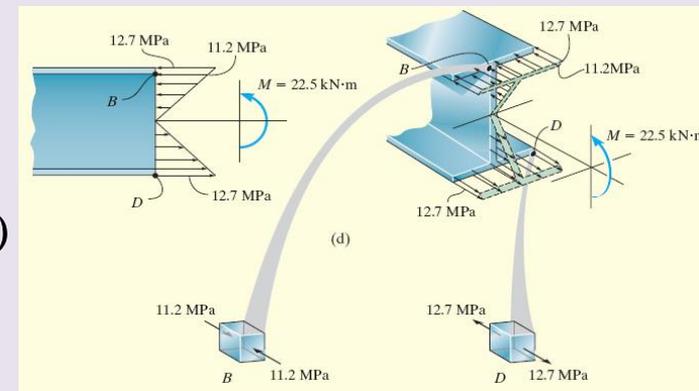
Por razões de simetria, o centroide  $C$  e, portanto, o eixo neutro, passa a meia altura da viga, e o momento de inércia é

$$\begin{aligned}
 I &= \sum (\bar{I} + Ad^2) \\
 &= 2 \left[ \frac{1}{12} (0,25)(0,02)^3 + (0,25)(0,002)(0,16)^2 \right] + \left[ \frac{1}{12} (0,02)(0,3)^3 \right] \\
 &= 301,3(10^{-6}) \text{ m}^4
 \end{aligned}$$



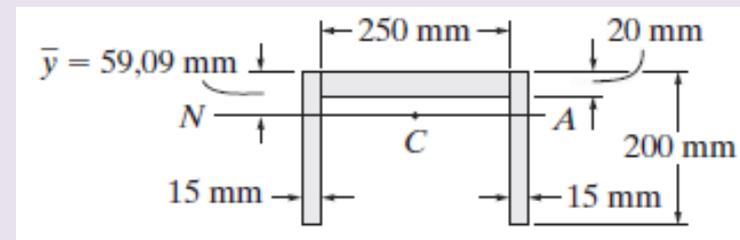
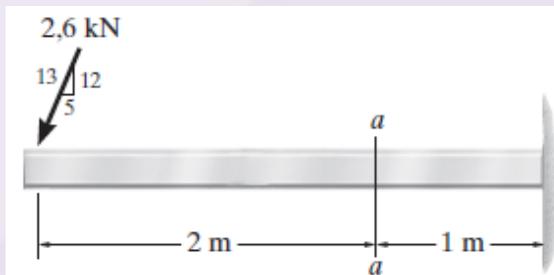
Aplicando a fórmula da flexão, para  $c = 170 \text{ mm}$ ,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22,5(0,17)}{301,3(10^{-6})} = 12,7 \text{ MPa (Resposta)}$$



## Exemplo 6.9

A viga mostrada na figura tem área de seção transversal em forma de um canal. Determine a tensão de flexão máxima que ocorre na viga na seção  $a-a$ .



**Solução:**

*O momento interno resultante deve ser calculado em torno do eixo neutro da viga na seção a–a. Visto que o eixo passa pelo centroide,*

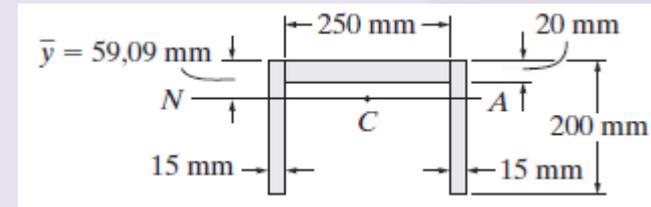
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2(0,1)(0,2)(0,015) + (0,01)(0,02)(0,25)}{2(0,2)(0,015) + (0,02)(0,25)} \\ &= 0,05909\text{m} = 59,09 \text{ mm}\end{aligned}$$

Aplicando a equação do equilíbrio de momento sobre o eixo neutro, temos

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \quad 2,4(2) + 1,0(0,05909) - M = 0 \Rightarrow M = 4,859 \text{ kNm}$$

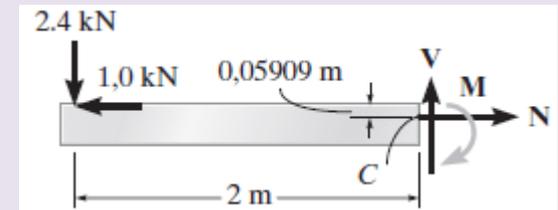
O momento de inércia sobre o eixo neutro é

$$I = \left[ \frac{1}{12} (0,25)(0,02)^3 + (0,25)(0,02)(0,05909 - 0,01)^2 \right] + 2 \left[ \frac{1}{12} (0,015)(0,2)^3 + (0,015)(0,2)(0,1 - 0,05909)^2 \right] = 42,26(10^{-6}) \text{ m}^4$$



A tensão de flexão máxima ocorre nos pontos mais afastados do eixo neutro.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4,859(0,2 - 0,05909)}{42,26(10^{-6})} = 16,2 \text{ MPa (Resposta)}$$



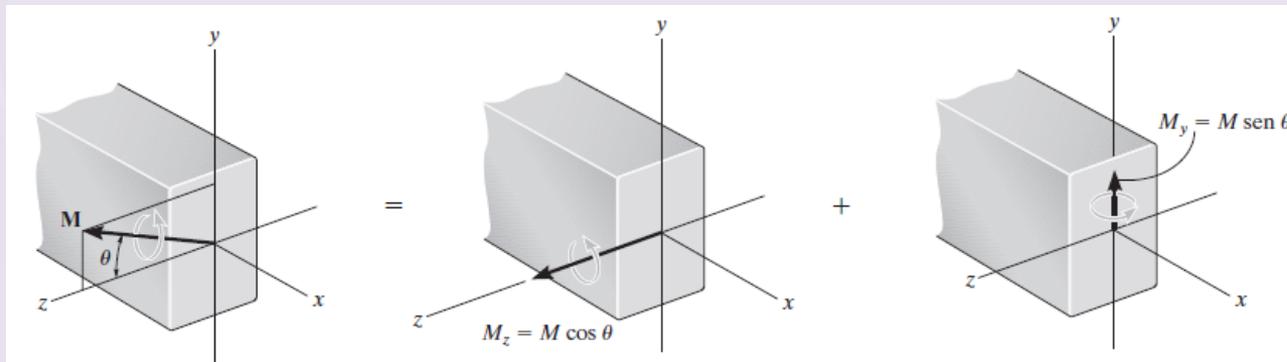
## Flexão assimétrica

### Momento aplicado ao longo do eixo principal

- Podemos expressar a tensão normal resultante em qualquer ponto na seção transversal, em termos gerais, como

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

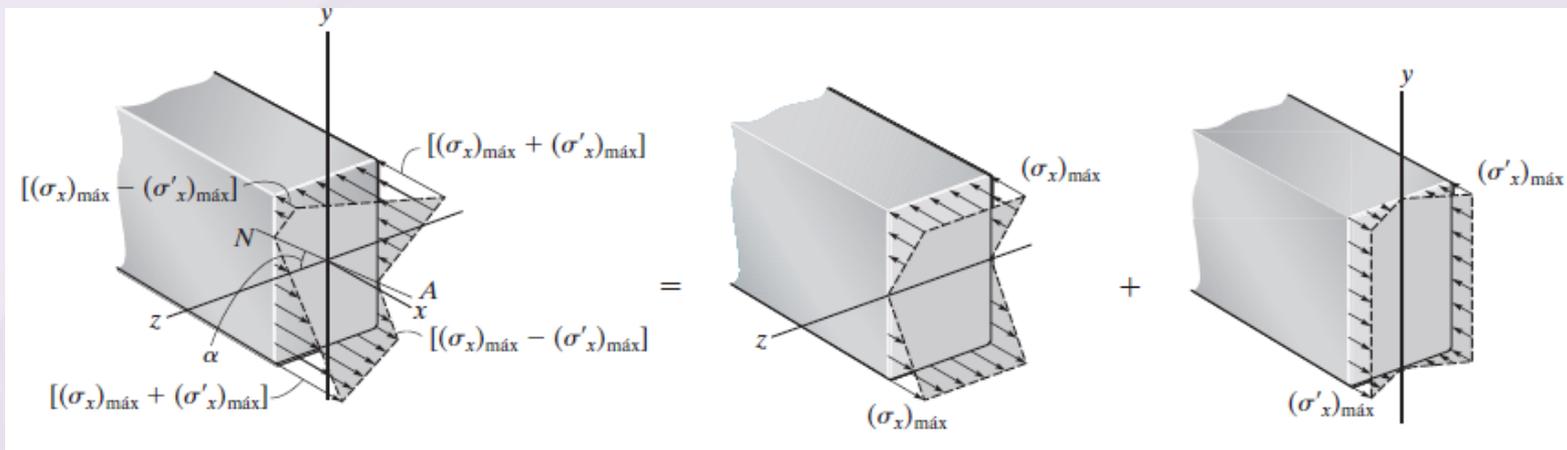
$\sigma$  = tensão normal no ponto  
 $y, z$  = coordenadas do ponto medidas em relação a  $x, y, z$   
 $M_y, M_z$  = componentes do momento interno resultante direcionados ao longo dos eixos  $y$  e  $z$   
 $I_y, I_z$  = *momentos principais de inércia calculados em torno dos eixos  $y$  e  $z$*



## Orientação do eixo neutro

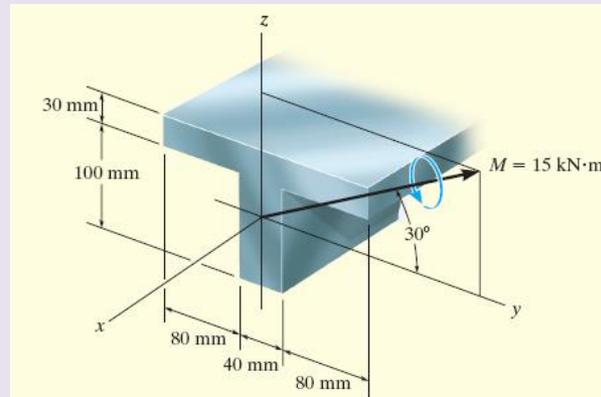
- O ângulo  $\alpha$  do eixo neutro pode ser determinado aplicando  $\sigma = 0$ . Temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta$$



## Exemplo 6.10

Uma viga em T está sujeita a um momento fletor de 15 kNm. Determine a tensão normal máxima na viga e a orientação do eixo neutro.

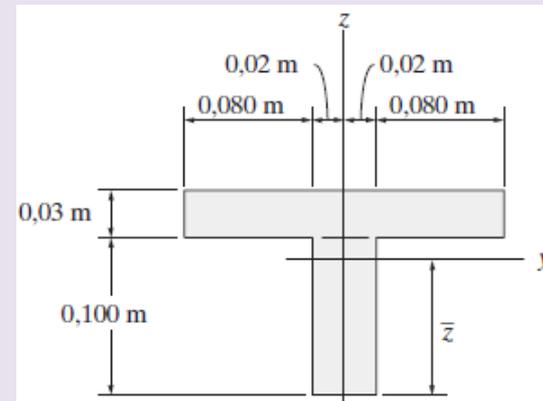


## Solução:

Ambas as componentes do momento são positivas. Temos

$$M_y = (15)\cos 30^\circ = 12,99 \text{ kNm}$$

$$M_z = (15)\sin 30^\circ = 7,50 \text{ kNm}$$



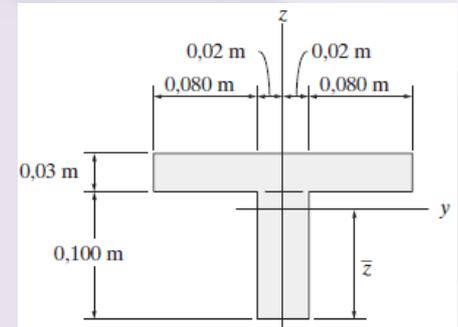
Para propriedades da seção, temos

$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z}A}{\sum A} = \frac{(0,05)(0,1)(0,04) + (0,115)(0,03)(0,2)}{(0,1)(0,04) + (0,03)(0,2)} = 0,0890 \text{ m}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos,  $I = \bar{I} + Ad^2$ , os principais momentos da inércia são:

$$I_z = \frac{1}{12} (0,1)(0,04)^3 + \frac{1}{12} (0,03)(0,2)^3 = 20,53(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$I_y = \left[ \frac{1}{12} (0,04)(0,1)^3 + (0,1)(0,04)(0,089 - 0,05)^2 \right] + \left[ \frac{1}{12} (0,2)(0,03)^3 + (0,2)(0,03)(0,115 - 0,089)^2 \right] = 13,92(10^{-6}) \text{ m}^4$$

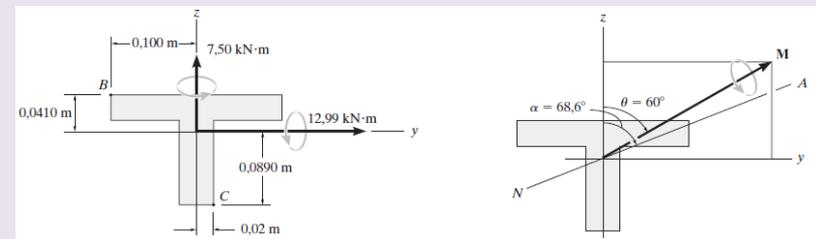


A maior tensão de tração ocorre em *B* e a maior tensão de compressão ocorre em *C*.

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7,5(-0,1)}{20,53(10^{-6})} + \frac{12,99(0,041)}{13,92(10^{-6})} = 74,8 \text{ MPa}$$

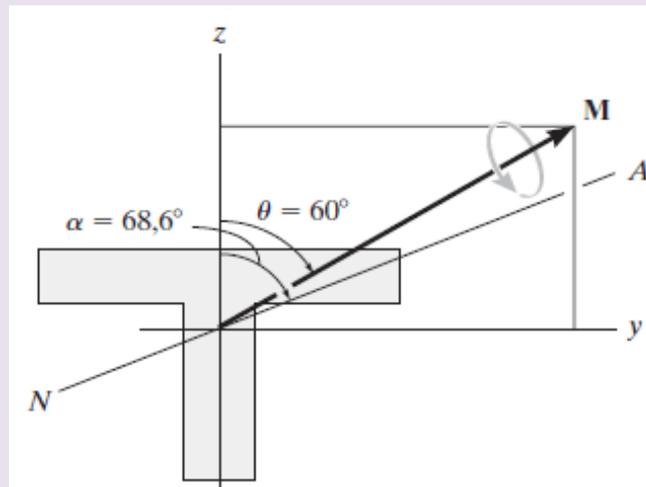
$$\sigma_C = -\frac{7,5(0,02)}{20,53(10^{-6})} + \frac{12,99(-0,089)}{13,92(10^{-6})} = -90,3 \text{ MPa (Resposta)}$$



y deve representar o eixo para o momento principal de inércia *mínimo*, e z deve representar o eixo para o momento principal de inércia *máximo*.

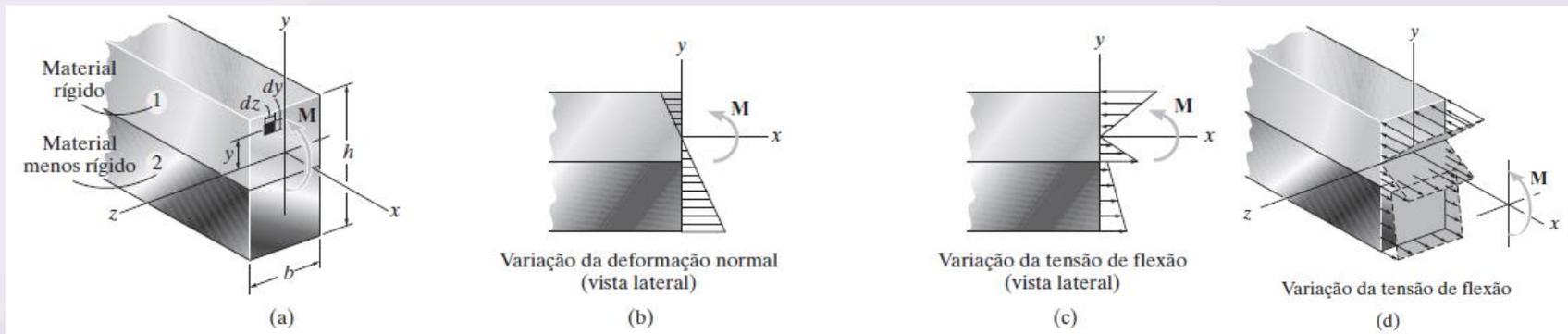
$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{20,53(10^{-6})}{13,92(10^{-6})} \right) \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\alpha = 68,6^\circ$$



## Vigas compostas

- Vigas construídas de dois ou mais materiais diferentes são denominadas **vigas compostas**.
- O *fator de transformação* é uma razão entre os módulos dos diferentes materiais que compõem a viga.



## Exemplo 6.11

Uma viga composta é feita de madeira e reforçada com uma tira de aço localizada em sua parte inferior. Ela tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Se for submetida a um momento fletor  $M = 2 \text{ kNm}$ , determine a tensão normal nos pontos  $B$  e  $C$ . Considere  $E_{\text{mad}} = 12 \text{ GPa}$  e  $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ .

## Solução:

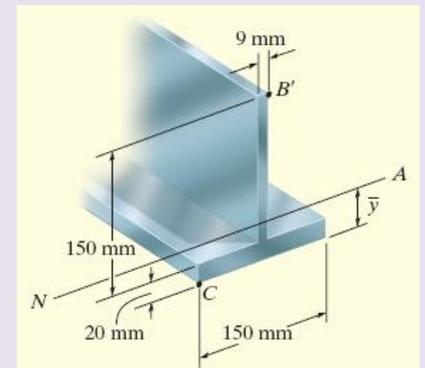
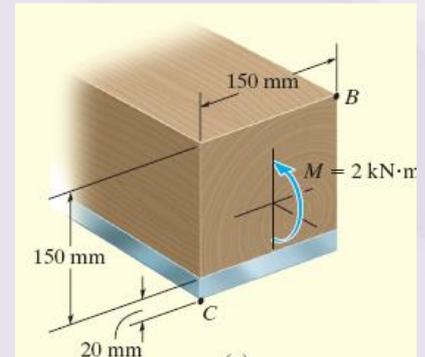
Transformaremos a seção em outra feita inteiramente de aço.

$$b_{\text{aço}} = nb_{\text{mad}} = \frac{12}{200}(150) = 9 \text{ mm}$$

A seção transformada é mostrada na figura ao lado.

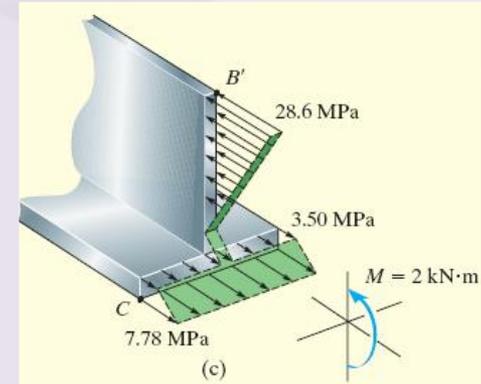
A localização do centroide (eixo neutro) é

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0,01)(0,02)(0,150) + (0,095)(0,009)(0,15)}{(0,02)(0,15) + (0,009)(0,15)} = 0,03638\text{m}$$



Portanto, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

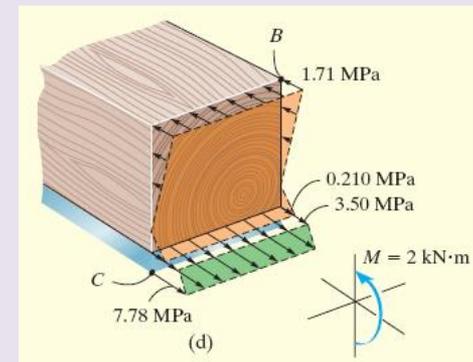
$$I_{NA} = \left[ \frac{1}{12} (0,15)(0,02)^3 + (0,15)(0,02)(0,03638 - 0,01)^2 \right] + \left[ \frac{1}{12} (0,009)(0,15)^3 + (0,009)(0,15)(0,095 - 0,03638)^2 \right] = 9,358(10^{-6}) \text{ m}^4$$



Aplicando a fórmula da flexão, a tensão normal em  $B'$  e  $C$  é

$$\sigma_{B'} = \frac{2(0,17 - 0,03638)}{9,358(10^{-6})} = 28,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2(0,03638)}{9,358(10^{-6})} = 27,87 \text{ MPa (Resposta)}$$

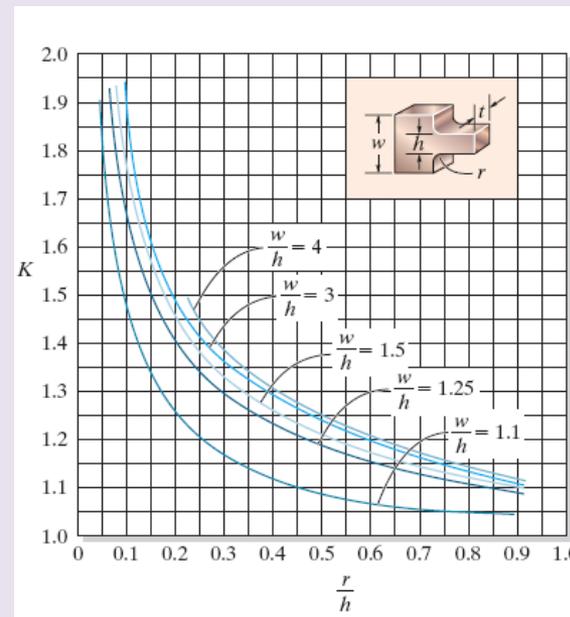


A tensão normal na madeira em  $B$  é  $\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12}{200}(28,56) = 1,71 \text{ MPa (Resposta)}$

## Concentrações de tensão

- A tensão normal *máxima* em cada uma das discontinuidades ocorre na seção que passa pela *menor* área de seção transversal.
- Uma vez que  $K$  for obtido, a tensão de flexão máxima é determinada por

$$\sigma_{\text{máx}} = K \frac{Mc}{I}$$



## Exemplo 6.14

A transição na área da seção transversal da barra de aço é obtida por filetes de redução. Se a barra for submetida a um momento fletor 5 kN·m, determine a tensão normal máxima desenvolvida no aço. A tensão de escoamento é  $\sigma_e = 500$  MPa.

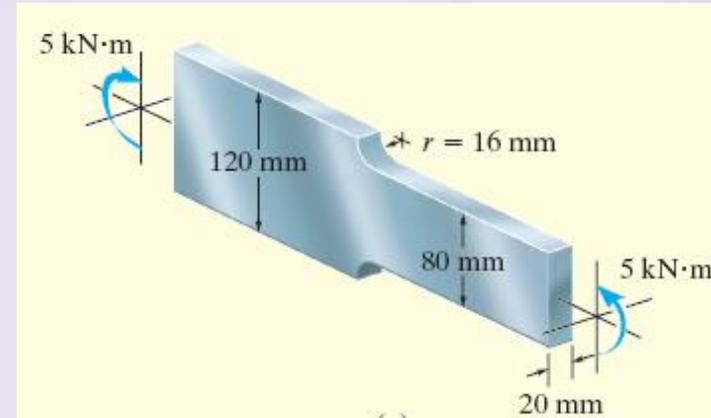
## Solução:

Pela geometria da barra,

$$\frac{r}{h} = \frac{16}{80} = 0,2 \quad \frac{w}{h} = \frac{120}{80} = 1,5$$

$K$  é 1,45 e temos

$$\sigma_{\text{máx}} = K \frac{Mc}{I} = (1,45) \frac{(5)(0,04)}{\left[ \frac{1}{12} (0,02)(0,08)^3 \right]} = 340 \text{ MPa}$$



Este resultado indica que o aço permanece elástico, visto que a tensão está abaixo da tensão de escoamento (500 MPa).