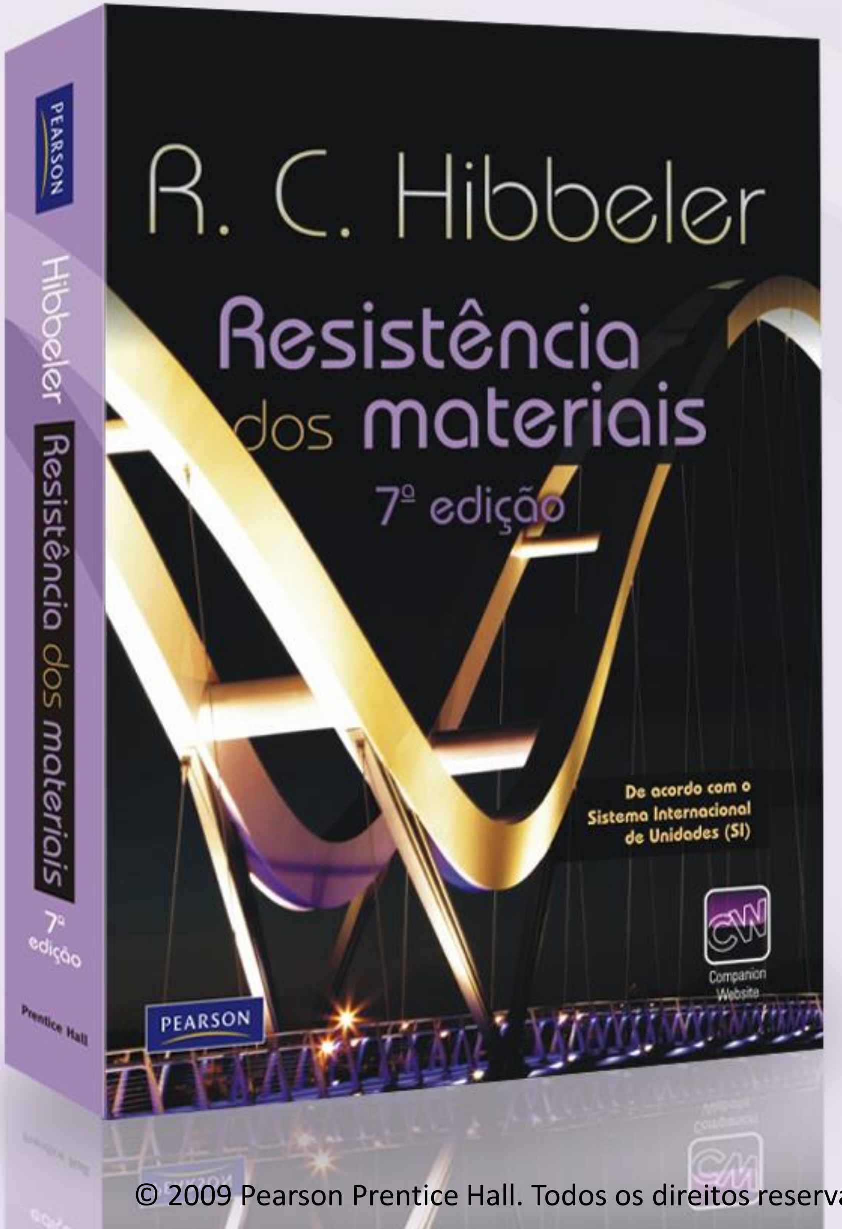
Capítulo 5

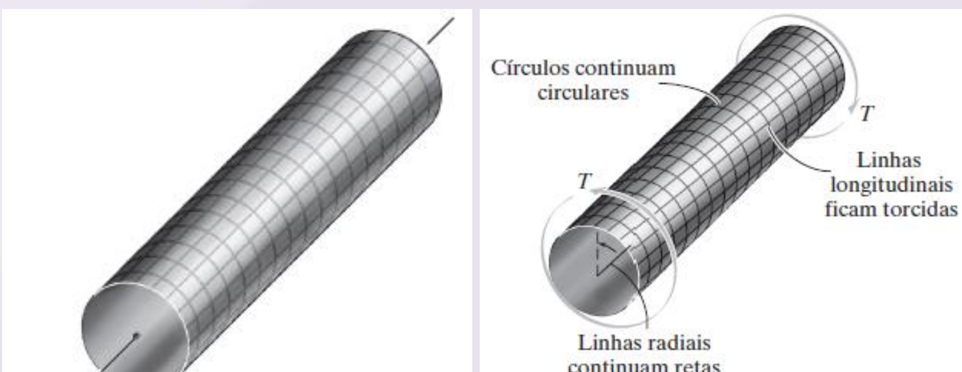
Torção



© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

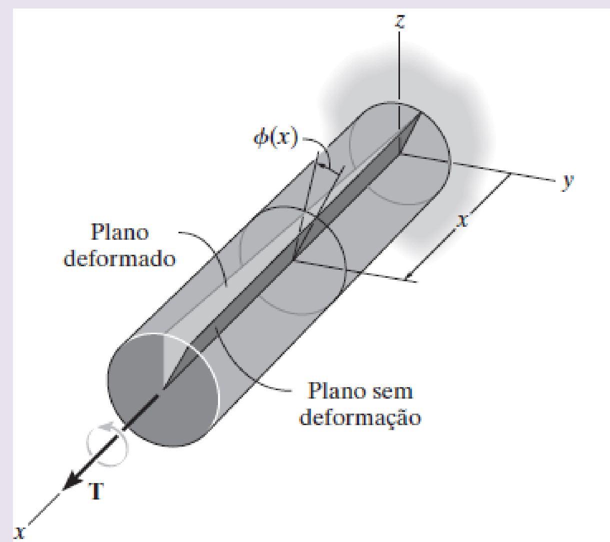
Deformação por torção de um eixo circular

- *Torque* é um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal.
- Se o ângulo de rotação for *pequeno*, o *comprimento e o raio do eixo permanecerão inalterados*.



Antes da deformação
(a)

Depois da deformação
(b)

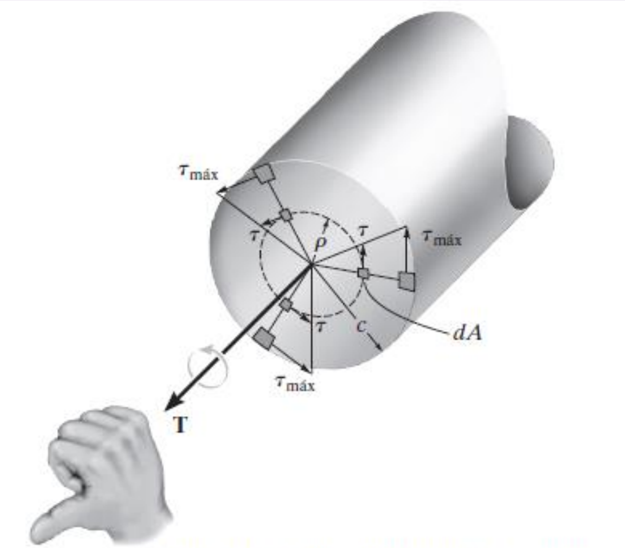


O ângulo de torção $\phi(x)$ aumenta à medida que x aumenta.

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

A fórmula da torção

- Se o material for linear elástico, então a lei de Hooke se aplica.
- Uma ***variação linear na deformação por cisalhamento*** resulta em uma ***variação linear na tensão de cisalhamento*** correspondente ao longo de qualquer linha radial na seção transversal.



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

$\tau_{\text{máx}}$ = tensão de cisalhamento máxima no eixo
τ = deformação por cisalhamento
T = torque interno resultante
J = momento polar de inércia da área da seção transversal
c = raio externo do eixo
ρ = distância intermediária

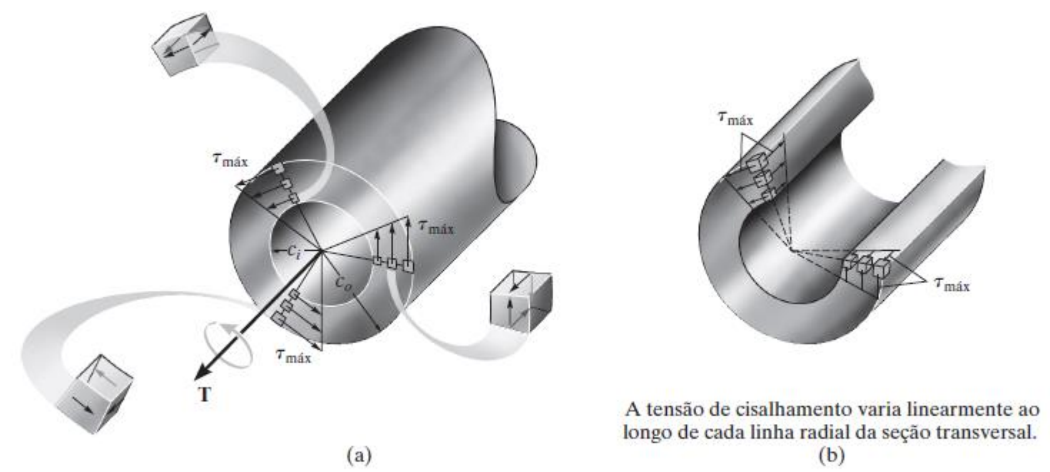
© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

- Se o eixo tiver uma seção transversal circular **maciça**,

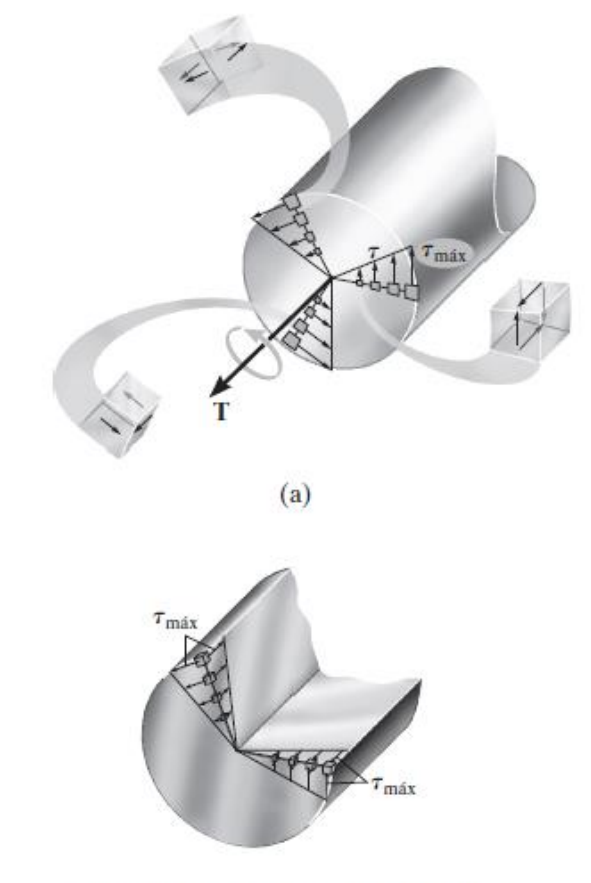
$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

- Se o eixo tiver uma seção transversal **tubular**,

$$J = \frac{\pi}{2}\left(c_o^4 - c_i^4\right)$$



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

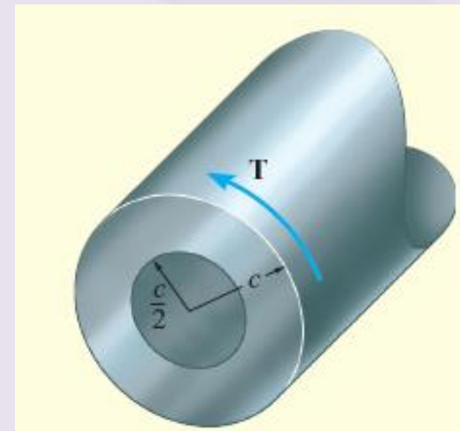


Tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Exemplo 5.2

O eixo *maciço* de raio *c* é submetido a um torque **T**. Determine a fração de T à qual resiste o material contido no interior da região externa do eixo, que tem raio *c*/2 e raio externo *c.*



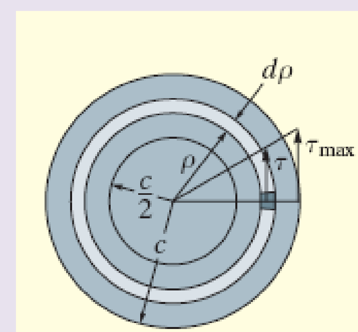
Solução:

A tensão no eixo varia linearmente, tal que $\tau = (\rho/c)\tau_{\text{máx}}$.

O torque no anel (área) localizado no interior da região sombreada mais clara é

$$dT' = \rho(\tau dA) = \rho(\rho/c)\tau_{\text{máx}}(2\pi\rho d\rho)$$

Para toda a área sombreada mais clara, o torque é



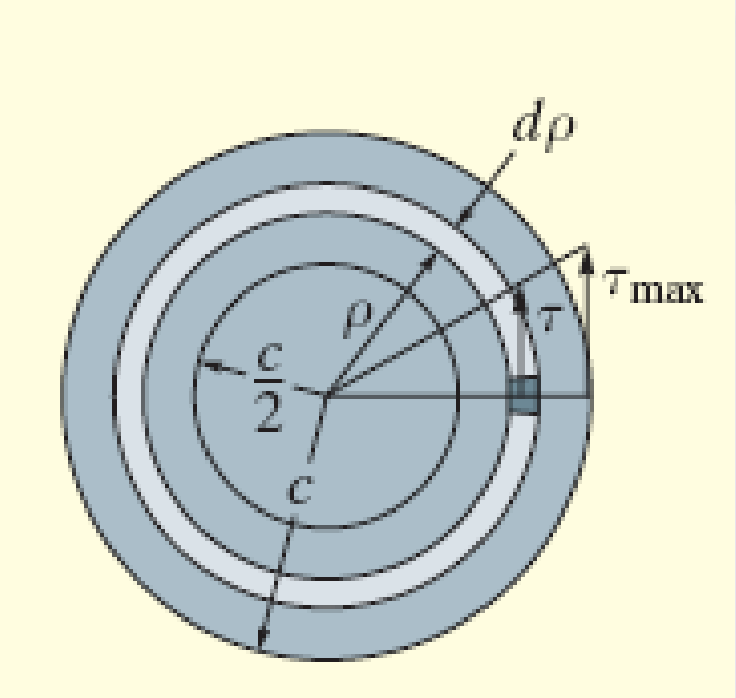
$$T' = \frac{2\pi\tau_{\text{máx}}}{c}\int_{c/2}^{c}\rho^3 d\rho = \frac{15\pi}{32}\tau_{\text{máx}}c^3 \quad (1)$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Usando a fórmula de torção para determinar a tensão máxima no eixo, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{(\pi/2)c^4}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2T}{\pi c^3}$$



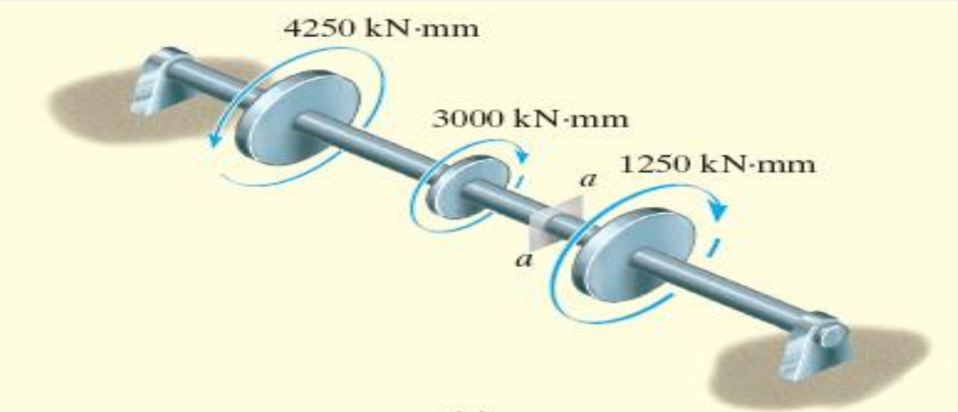
Substituindo essa expressão na Equação 1,

$$T' = \frac{15}{16}T \qquad \text{(Resposta)}$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Exemplo 5.3

O eixo está apoiado em dois mancais e sujeito a três torques. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos *A* e *B* localizados na seção *a*–*a* do eixo.



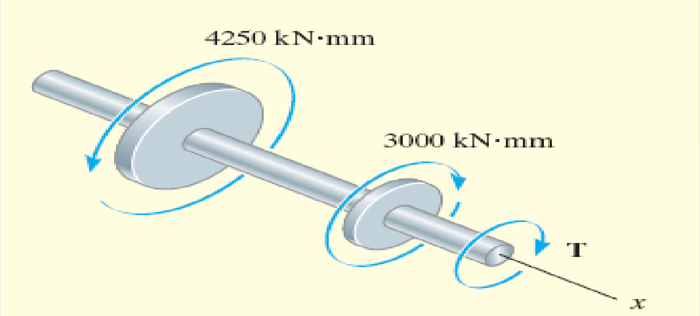
(a)

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Solução:

Pelo diagrama de corpo livre do segmento esquerdo,

$$\sum M_x = 0; \quad 4.250 - 3.000 - T = 0 \Rightarrow T = 1.250\,\text{kN}\cdot\text{mm}$$

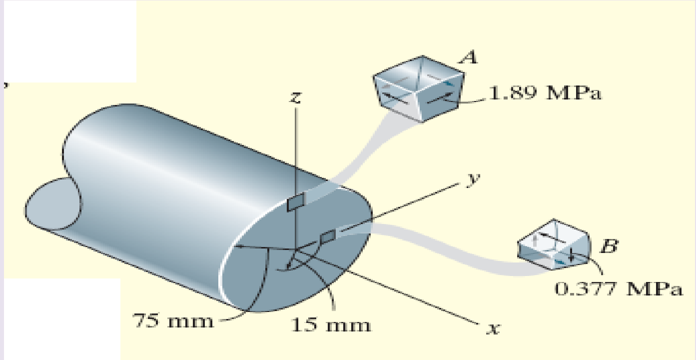


O momento polar de inércia para o eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}(75)^4 = 4{,}97\times10^7\ \text{mm}$$

Visto que *A* se encontra em $\rho = c = 75$ mm,

$$\tau_B = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.250)(75)}{4{,}97\times10^7} = 1{,}89\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



Da mesma forma, para *B*, em ρ =15 mm, temos

$$\tau_B = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.250)(15)}{4{,}97\times10^7} = 0{,}377\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Transmissão de potência

- ***Potência*** é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo.
- Para um eixo rotativo com torque, a potência é:

$$P = T\omega \quad \text{onde a velocidade angular do eixo é } \omega = d\theta / dt$$

- Visto que $1\,\text{ciclo} = 2\pi\ \text{rad} \Rightarrow \omega = 2\pi f$, a equação para a potência é

$$P = 2\pi f T$$

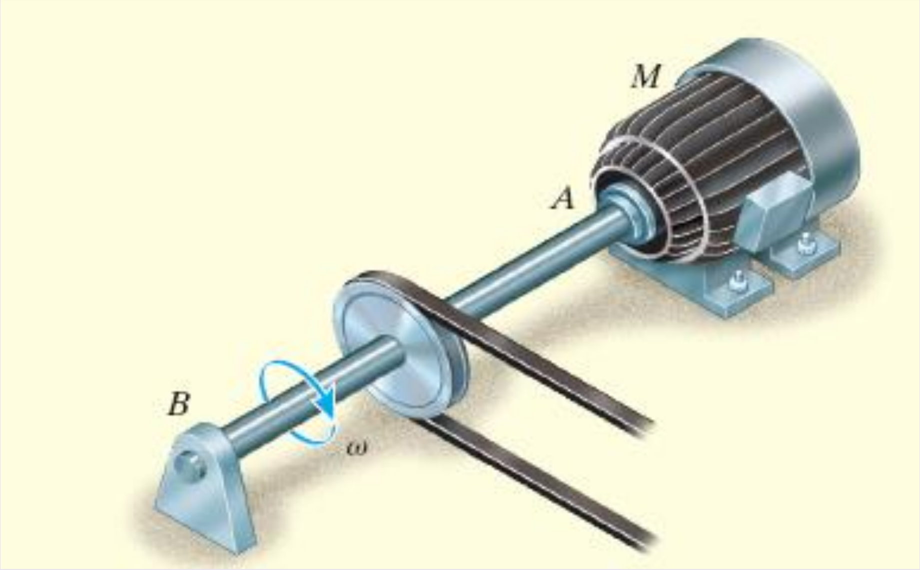
- Para o projeto do eixo, o parâmetro de projeto ou parâmetro geométrico é:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}}$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Exemplo 5.5

Um eixo maciço de aço *AB* será usado para transmitir 3.750 W do motor *M* ao qual está acoplado. Se o eixo girar a ω = 175 rpm e o aço tiver uma tensão de cisalhamento admissível τ_{adm} = 100 MPa, determine o diâmetro exigido para o eixo com precisão de mm.



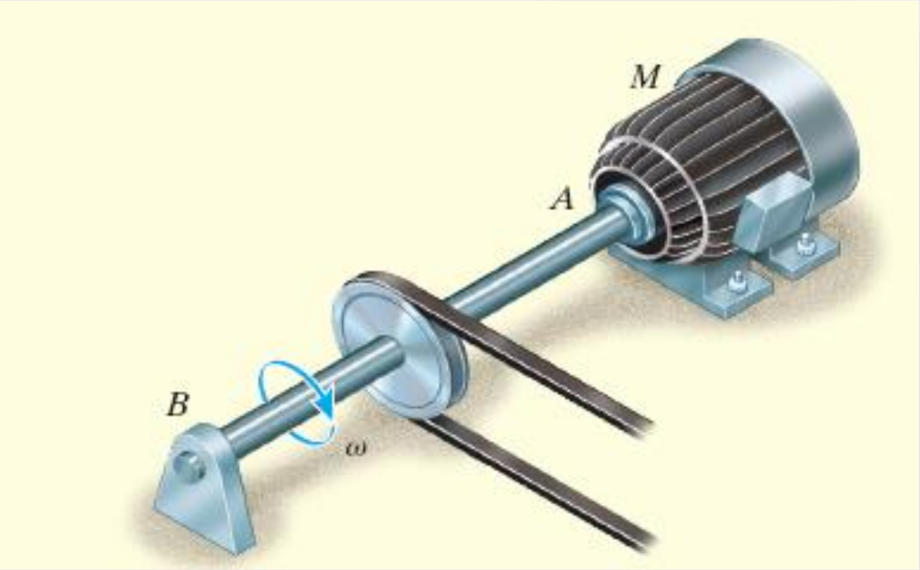
© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Solução:

O torque no eixo é

$$P = T\omega$$

$$3.750 = T\left(\frac{175\times 2\pi}{60}\right) \Rightarrow T = 204{,}6\ \text{Nm}$$



Assim,

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}}$$

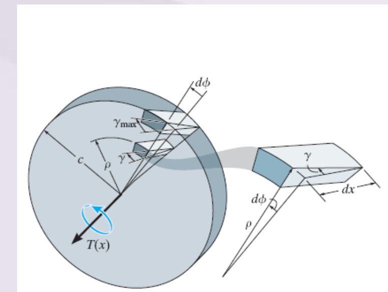
$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{\text{adm}}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2(204{,}6)(1.000)}{\pi(100)}\right)^{1/3} = 10{,}92\ \text{mm}$$

Visto que 2*c* = 21,84 mm, selecione um eixo com diâmetro 22 mm.

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Ângulo de torção

- Integrando em todo o comprimento *L* do eixo, temos



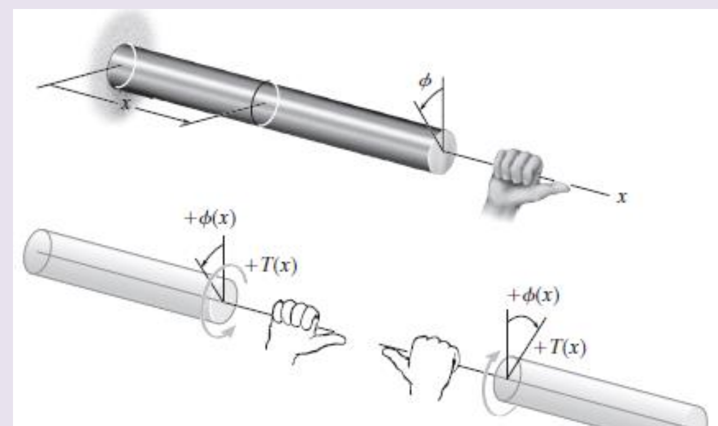
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{J(x)\,G}$$

Φ = ângulo de torção
T(*x*) = torque interno
J(*x*) = momento polar de inércia do eixo
G = módulo de elasticidade ao cisalhamento

- Considerando que o material é homogêneo, *G* é constante, logo

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

- A convenção de sinal é determinada pela regra da mão direita.

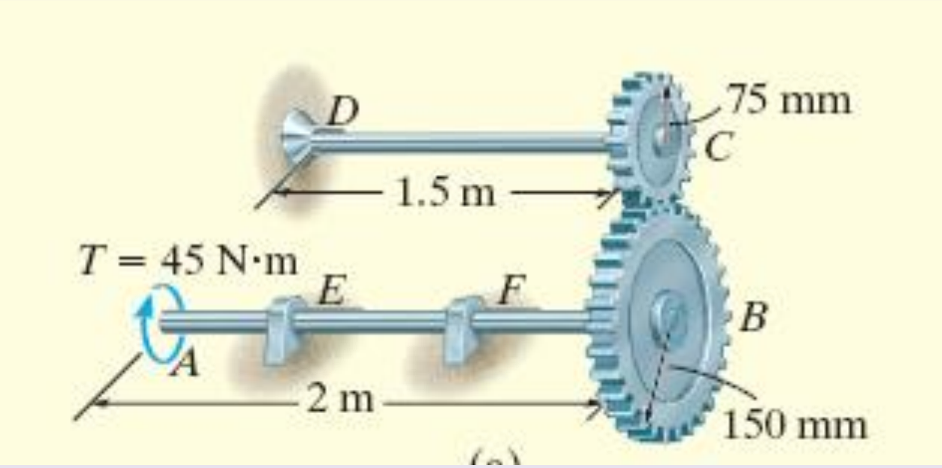


Convenção de sinal positivo para T e ϕ.

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Exemplo 5.8

Os dois eixos maciços de aço estão interligados por meio das engrenagens. Determine o ângulo de torção da extremidade *A* do eixo *AB* quando é aplicado o torque 45 Nm. Considere *G* = 80 GPa. O eixo *AB* é livre para girar dentro dos mancais *E* e *F*, enquanto o eixo *DC* é fixo em *D*. Cada eixo tem diâmetro de 20 mm.



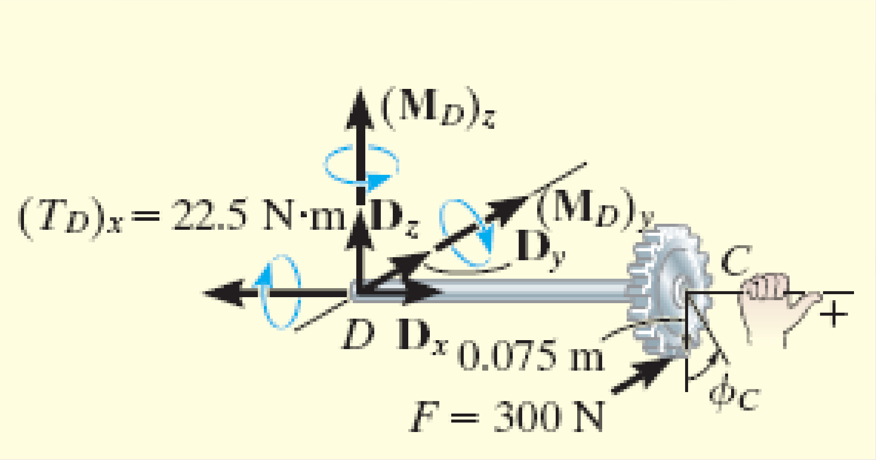
© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Solução:

Do diagrama de corpo livre,

$$F = 45/0{,}15 = 300\ \text{N}$$

$$(T_D)_x = 300(0{,}075) = 22{,}5\ \text{Nm}$$



O ângulo de torção em *C* é

$$\phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(+22{,}5)(1{,}5)}{(\pi/2)(0{,}001)^4\left[80(10)^9\right]} = +0{,}0269\,\text{rad}$$

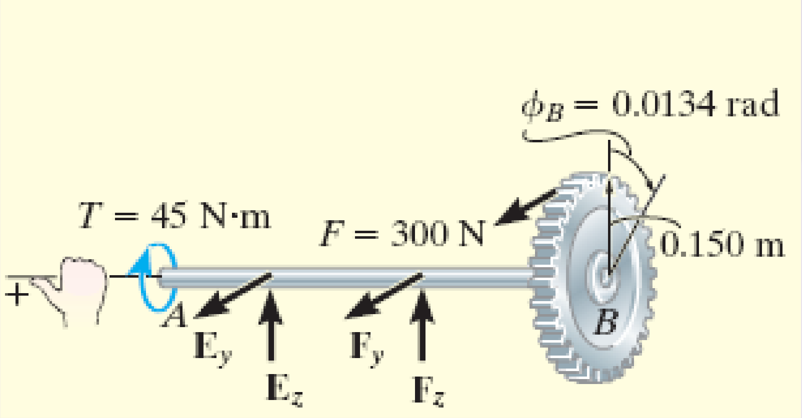
Visto que as engrenagens na extremidade estão engrenadas,

$$\phi_B(0{,}15) = (0{,}0269)(0{,}075) \Rightarrow 0{,}0134\,\text{rad}$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Visto que o ângulo na extremidade *A* em relação ao extremo *B* do eixo *AB* causada pelo torque de 45 Nm,

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{(+45)(2)}{(\pi/2)(0{,}010)^4\left[80(10^9)\right]} = +0{,}0716\,\text{rad}$$



A rotação da extremidade *A* é portanto

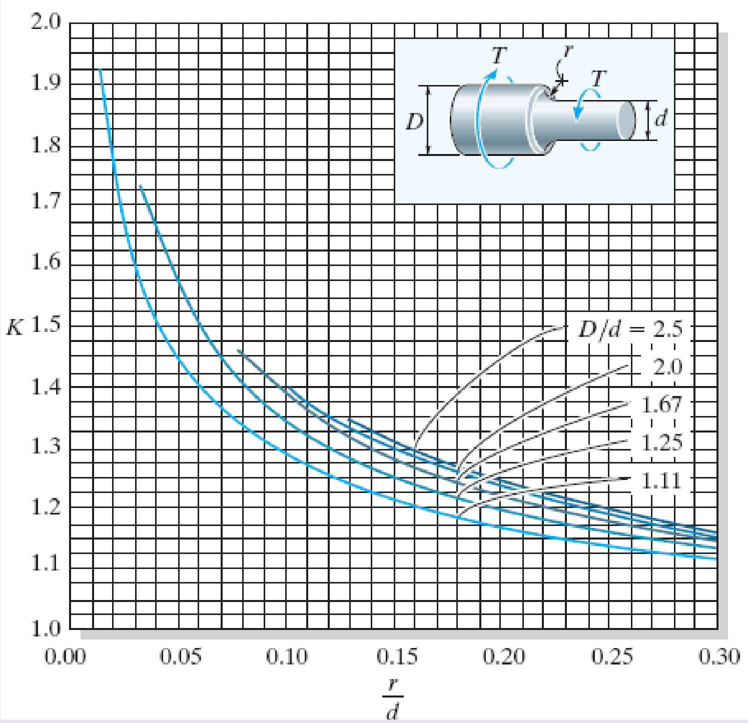
$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0{,}0134 + 0{,}0716 = +0{,}0850\,\text{rad} \quad \text{(Resposta)}$$

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Concentração de tensão

- O ***fator de concentração de tensão por torção***, *K*, é usado para simplificar a análise complexa da tensão.
- A tensão de cisalhamento máxima é determinada pela equação:

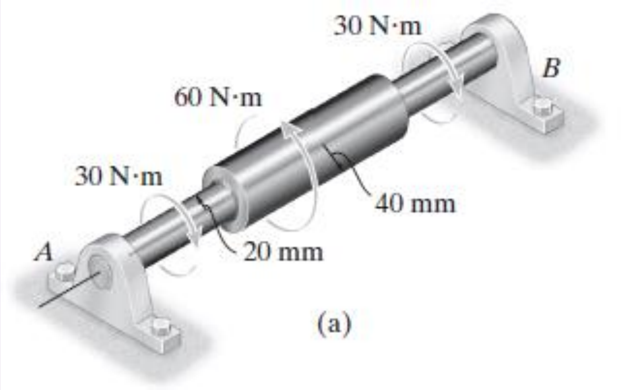
$$\tau_{\text{máx}} = K \frac{Tc}{J}$$



© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Exemplo 5.18

O eixo em degrau está apoiado nos mancais em *A* e *B*. Determine a tensão máxima no eixo resultante dos torques aplicados. O filete na junção de cada eixo tem raio r = 6 mm.



© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.

Solução:

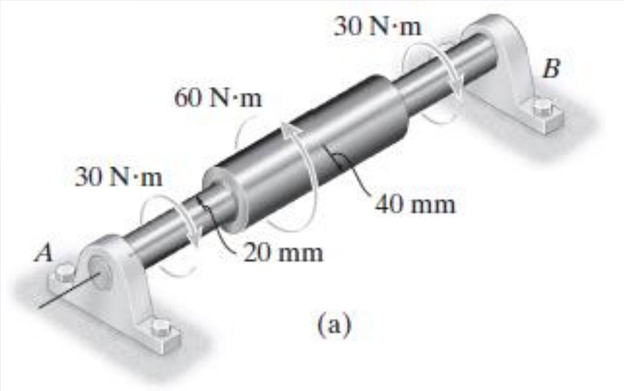
Por inspeção, o equilíbrio de momento em torno da central do eixo é satisfeito.

O fator de concentração de tensão pode ser determinado pela geometria do eixo:

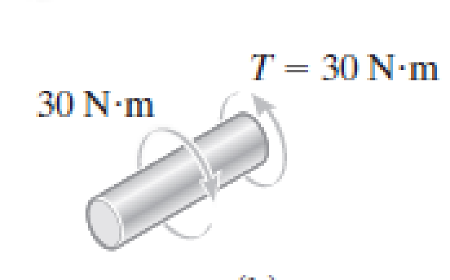
$$\frac{D}{d}=\frac{2(40)}{2(20)}=2; \qquad \frac{r}{d}=\frac{6}{2(20)}=0{,}15$$

Assim, K = 1,3 e a tensão máxima é

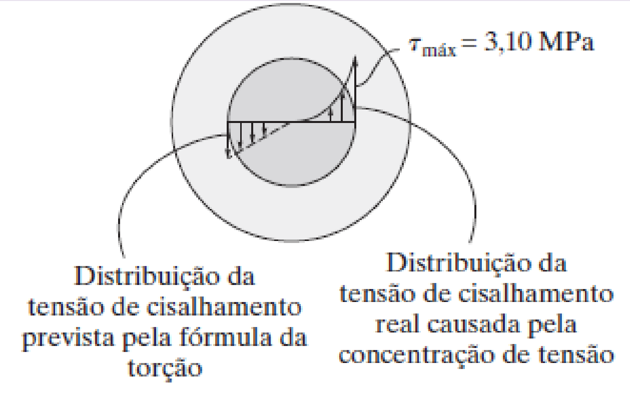
$$\tau_{\text{máx}}=K\frac{Tc}{J}=1{,}3\left[\frac{30(0{,}020)}{(\pi/2)(0{,}020)^4}\right]=3{,}10\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



(a)



(b)



(c)

© 2009 Pearson Prentice Hall. Todos os direitos reservados.