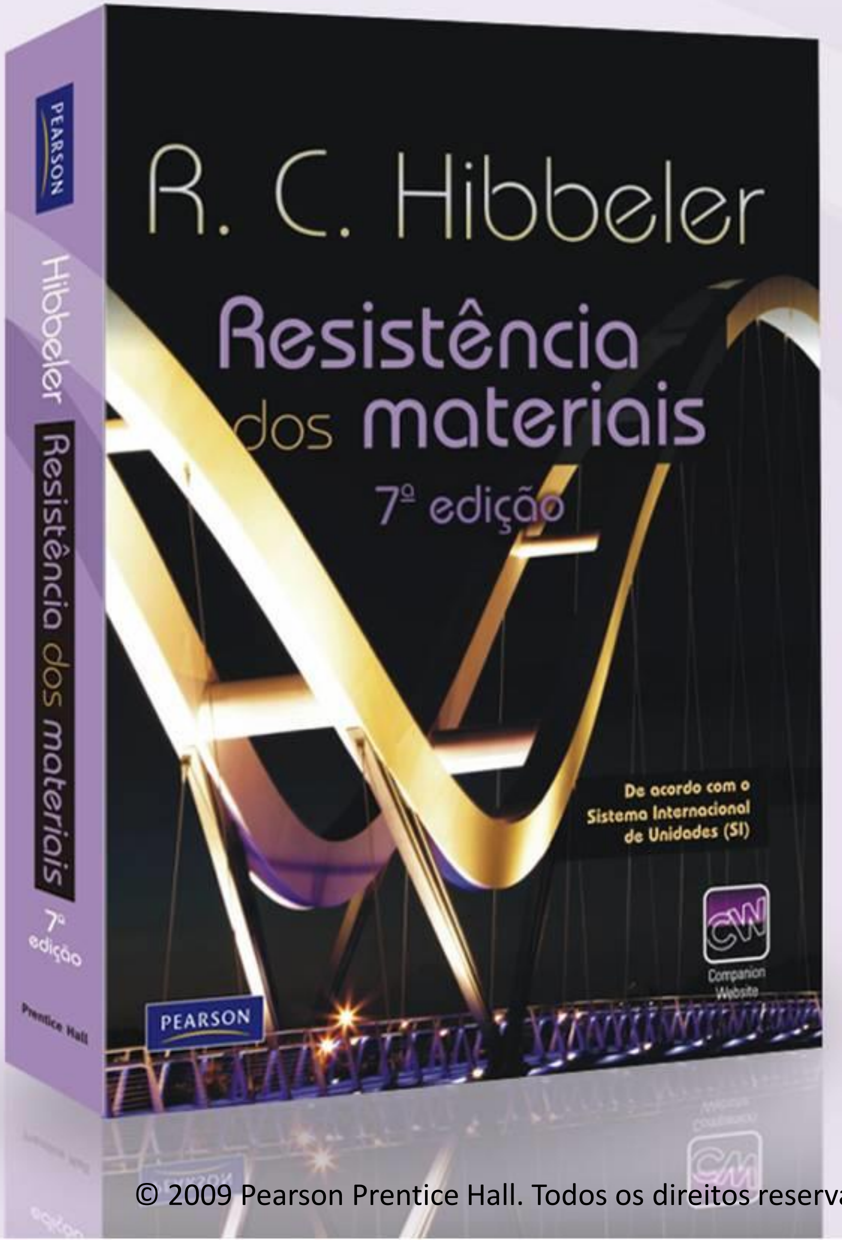
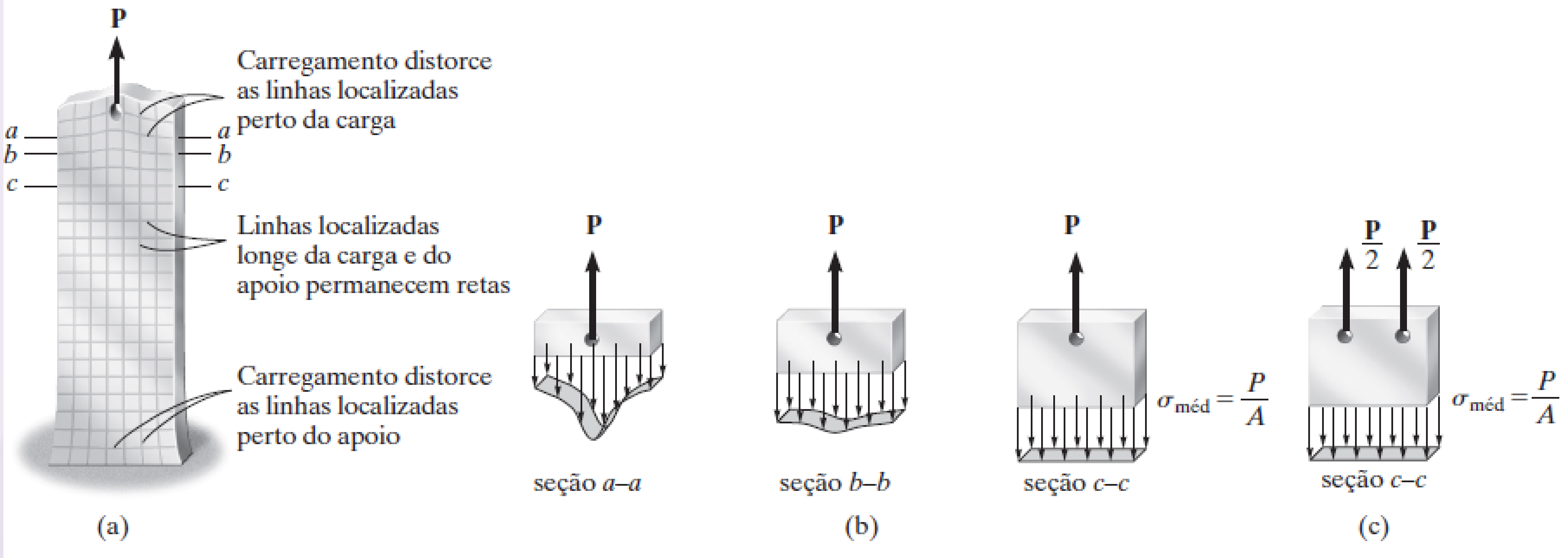
Capítulo 4

Carga axial



Princípio de Saint-Venant

- O *princípio Saint-Venant* afirma que a deformação e tensão localizadas nas regiões de aplicação de carga ou nos apoios tendem a "nivelar-se" a uma distância suficientemente afastada dessas regiões.



Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

- Usando a lei Hooke e as definições de tensão e deformação, somos capazes de determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axias.
- Suponha um elemento sujeito a cargas,

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \Rightarrow \quad \delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E}$$

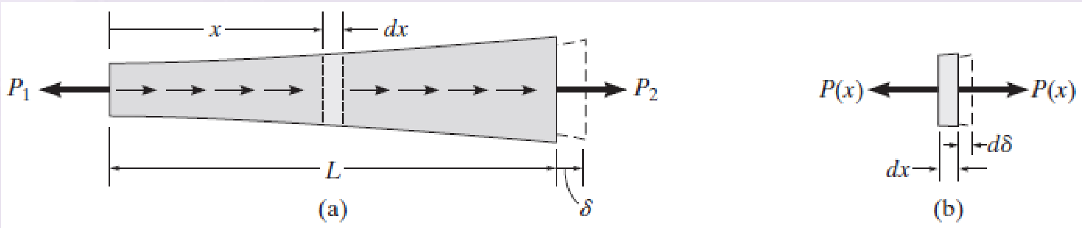
δ = deslocamento de um ponto na barra relativo a outro

L = distância original

P(*x*) = força axial interna na seção

A(*x*) = área da seção transversal da barra

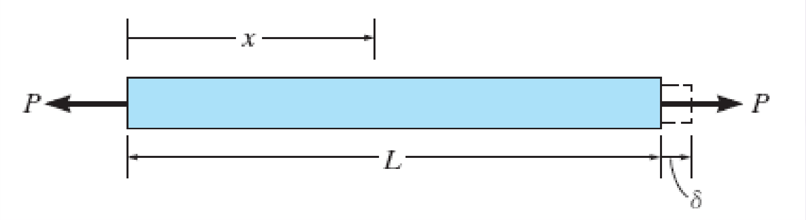
E = módulo de elasticidade



Carga constante e área de seção transversal

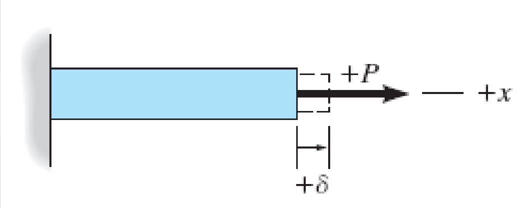
- Quando uma força constante externa é aplicada a cada extremidade da barra,

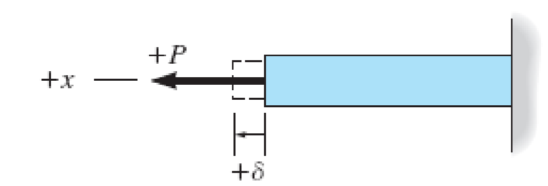
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



Convenção de sinais

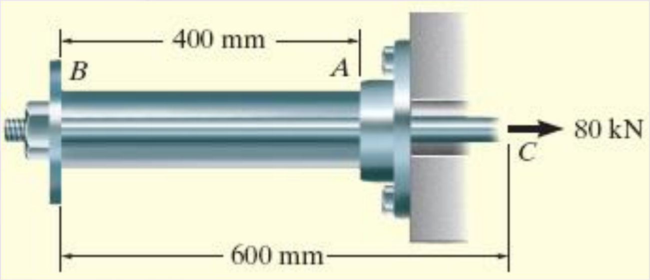
- Força e deslocamento são positivos se provocarem tração e alongamento; e negativos causarão compressão e contração.

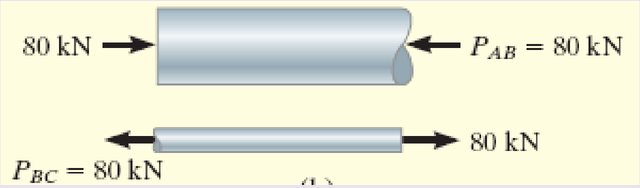




Exemplo 4.2

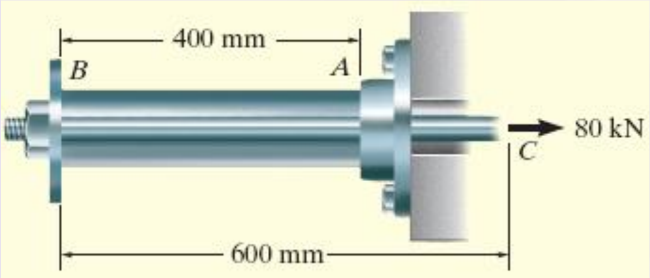
O conjunto é composto por um tubo de alumínio *AB* com área de seção transversal de 400 mm^2. Uma barra de aço com 10 mm de diâmetro está acoplada a um colar rígido e que passa pelo tubo. Se uma carga de tração de 80 kN for aplicada à barra, determine o deslocamento da extremidade *C* da barra. ($E_{aço}$ = 200 GPa, E_{al} = 70 GPa)





Solução:

Encontre o deslocamento da extremidade *C* em relação à extremidade *B*.

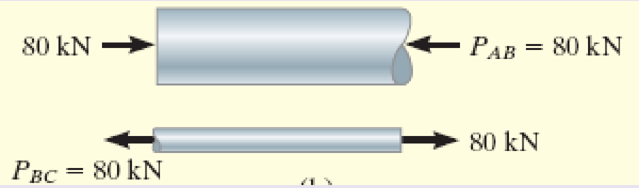


$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{\left[+80\left(10^3\right)\right](0{,}6)}{\pi(0{,}005)\left[200\left(10^9\right)\right]} = +0{,}003056\text{m} \rightarrow$$

O deslocamento da extremidade *B* em relação à *extremidade fixa A* é

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{\left[-80\left(10^3\right)\right](0{,}4)}{\left[400\left(10^{-6}\right)\right]\left[70\left(10^9\right)\right]} = -0{,}001143 = 0{,}001143\text{m} \rightarrow$$

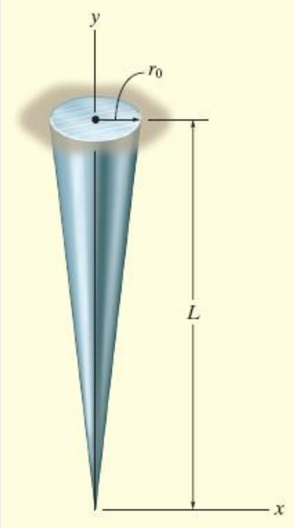
Visto que ambos os deslocamentos são para direita, o deslocamento resultante de *C* em relação à extremidade fixa *A* é, portanto,

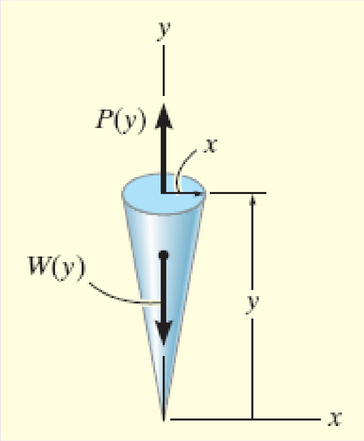


$$\delta_C = \delta_C + \delta_{C/B} = 0{,}0042\,\text{m} = 4{,}20\,\text{mm} \rightarrow \text{(Resposta)}$$

Exemplo 4.4

Um elemento é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade *E*. Se esse elemento tiver forma de um *cone*, determine até que distância sua extremidade se deslocará sob a força da gravidade, quando suspenso na posição vertical.





Solução:

O raio *x* do cone em função de *y é* determinado por cálculo proporcional, isto é,

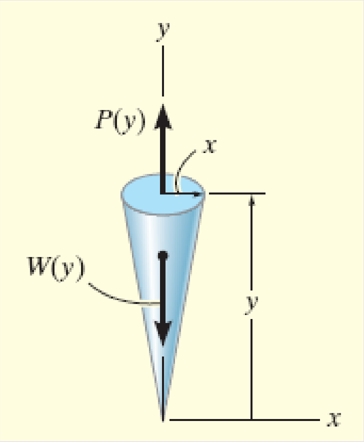
$$\frac{x}{y} = \frac{r_o}{L}; \qquad x = \frac{r_o}{L}y$$

O volume de um cone com raio base *x* e altura *y* é

$$V = \frac{\pi}{3}yx^2 = \frac{\pi r_o^2}{3L^2}y^3$$

Visto que $W = \gamma V$, a força interna na seção torna-se

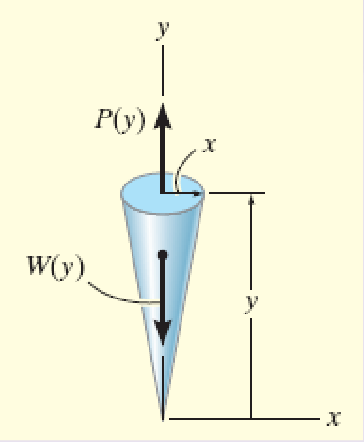
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad P(y) = \frac{\gamma \pi r_o^2}{3L^2}y^3$$



A área de seção transversal também é função da posição *y*.

Temos

$$A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi r_o^2}{L^2} y^2$$



Entre os limites *y* = 0 e *y* = *L*,

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)dy}{A(y)E} = \int_0^L \frac{\left[\left(\gamma \pi r_o^2 / 3L^2\right)\right]dy}{\left[\left(\gamma \pi r_o^2 / L^2\right)\right]E} = \frac{\gamma L^2}{6E} \text{ (Resposta)}$$

Princípio da superposição

- *Princípio da superposição* é frequentemente usado para determinar a tensão ou o deslocamento em um ponto de um elemento quando este estiver sujeito a um carregamento complicado.

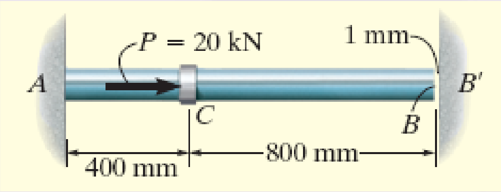
Elemento com carga axial estaticamente indeterminado

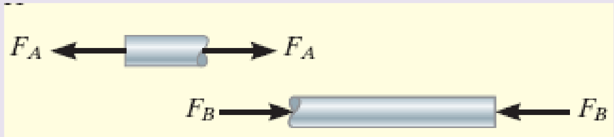
- A barra é ***estatisticamente indeterminada*** quando as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações.

Exemplo 4.5

A haste de aço tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em *A*. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede *B*’ e a haste. Determine as reações em *A e B*’ se a haste for submetida a uma força axial *P* = 20 kN. Despreze o tamanho do colar em *C*.

($E_{aço}$ = 200 GPa)



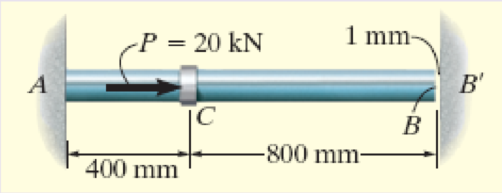


Solução:

O equilíbrio da haste exige

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -F_A - F_B + 20\left(10^3\right) = 0 \qquad (1)$$

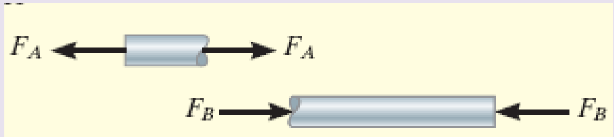
A condição de compatibilidade para a haste é $\delta_{B/A} = 0{,}001\text{m}$.



Usando a relação carga-deslocamento,

$$\delta_{B/A} = 0{,}001 = \frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE}$$

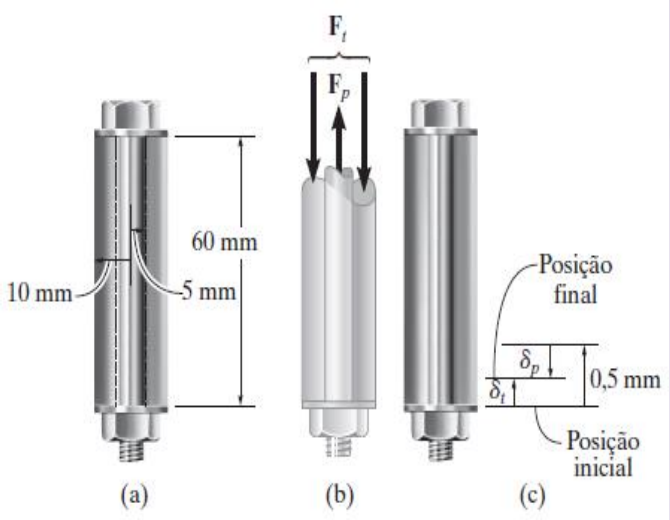
$$F_A(0{,}4) - F_B(0{,}8) = 3.927{,}0 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad (2)$$



As equações 1 e 2 nos dá F_A = 16,6 kN e F_B = 3,39 kN. (Resposta)

Exemplo 4.8

O parafuso de liga de alumínio 2014-T6 e é apertado de modo a comprimir um tubo cilíndrico de liga de magnésio Am 1004-T61. O tubo tem raio externo de 10 mm, e consideramos que o raio interno do tubo e o raio do parafuso são ambos 5 mm. As arruelas nas partes superior e inferior do tubo são consideradas rígidas e têm espessura desprezível. Inicialmente, a porca é apertada levemente a mão; depois é apertada mais meia-volta com uma chave de porca. Se o parafuso tiver 20 roscas por polegada, determine a tensão no parafuso.



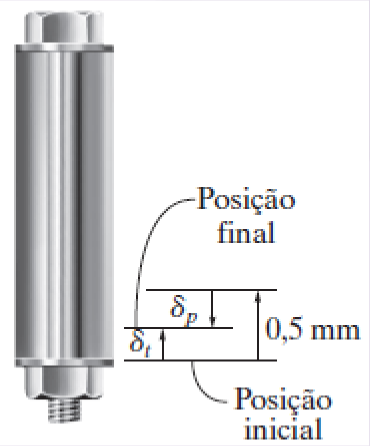
Solução:

O equilíbrio exige

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad F_b - F_t = 0 \qquad (1)$$

Quando a porca é apertada contra o parafuso, o tubo encurta.

$$(+\uparrow) \qquad \delta_t = 0{,}5 - \delta_b$$



Considerando dois módulos de elasticidade,

$$\frac{F_t(60)}{\pi\left[10^2 - 5^2\right]\left[45\left(10^3\right)\right]} = 0{,}5 - \frac{F_b(60)}{\pi\left[5^2\right]\left[75\left(10^3\right)\right]}$$

$$5F_t = 125\pi(1125) - 9F_b \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2 simultâneamente, temos

$$F_b = F_t = 31.556 = 31{,}56\,\text{kN}$$

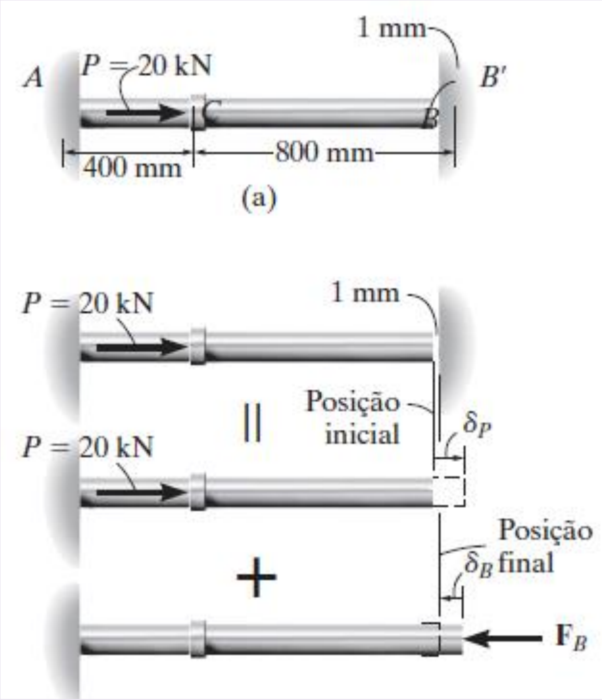
As tensões no parafuso e no tubo são, portanto,

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{31.556}{\pi(5)} = 401{,}8\ \text{N/mm}^2 = 401{,}8\ \text{MPa (Resposta)}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{31.556}{\pi\left(10^2 - 5^2\right)} = 133{,}9\ \text{N/mm}^2 = 133{,}9\ \text{MPa (Resposta)}$$

Exemplo 4.9

A haste de aço A-36 tem diâmetro de 5 mm. Está presa à parede fixa em *A* e, antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede em *B*' e a haste. Determine as reações em *A* e *B*'.



Solução:

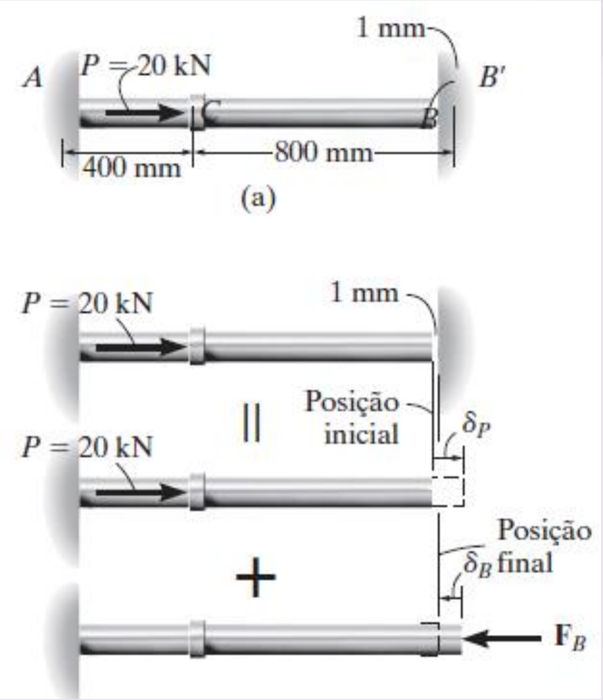
Considere o apoio em *B*’ como redundante e usando o princípio da superposição

$$\overset{+}{\rightarrow} \qquad 0{,}001 = \delta_P - \delta_B \qquad (1)$$

Além,

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} = \frac{\left[20\left(10^3\right)\right](0{,}4)}{\pi(0{,}0025)\left[200\left(10^9\right)\right]} = 0{,}002037\text{m}$$

$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{AE} = \frac{F_B(1{,}2)}{\pi(0{,}0025)\left[200\left(10^9\right)\right]} = 0{,}3056\left(10^{-6}\right)F_B$$



Substituindo na equação 1,temos

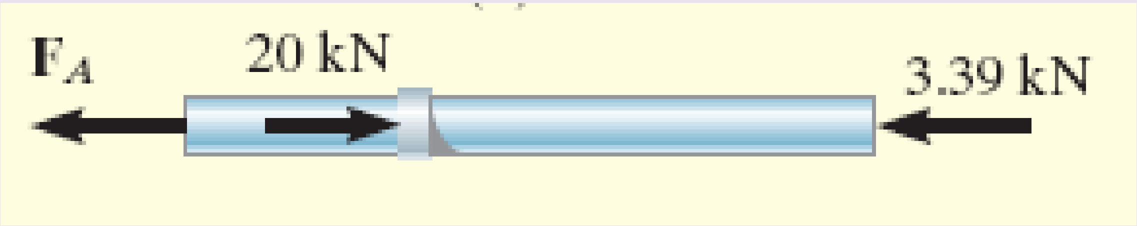
$$0{,}001 = 0{,}002037 - 0{,}3056\left(10^{-6}\right)F_B$$

$$F_B = 3{,}39\left(10^{3}\right) = 3{,}39\ \text{kN} \quad \text{(Resposta)}$$

Pelo diagrama de corpo livre,

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0; \qquad -F_A + 20 - 3{,}39 = 0$$

$$F_A = 16{,}6\ \text{kN} \quad \text{(Resposta)}$$



Tensão térmica

- Uma mudança na temperatura pode provocar alterações nas dimensões de um material.
- Se o material for homogêneo e isotrópico,

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

α = ***coeficiente linear de expansão térmica***, propriedade do material

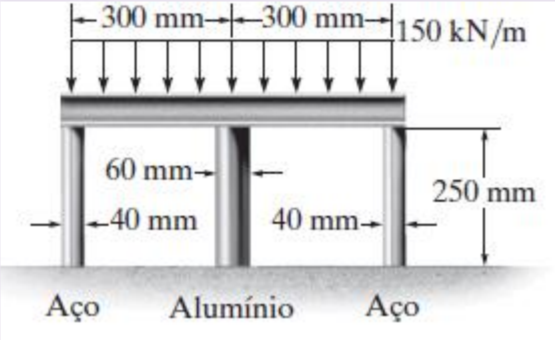
ΔT = variação na temperatura do elemento

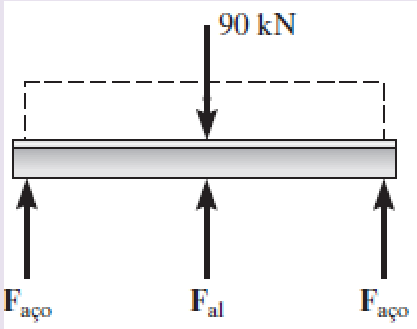
T = comprimento inicial do elemento

δ_T = variação no comprimento do elemento

Exemplo 4.12

Uma barra rígida está presa à parte superior de três postes feitos de aço A-36 e alumínio 2014-T6. Cada um dos postes tem comprimento de 250 mm quando não há nenhuma carga aplicada à barra e a temperatura é de $T_1 = 20°$ C. Determine a força suportada por cada poste se a barra for submetida a um carregamento distribuído uniformemente de 150 kN/m e a temperatura aumentar até $T_2 = 80°$ C.

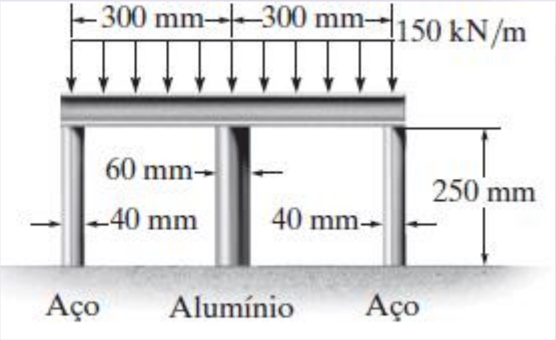




Solução:

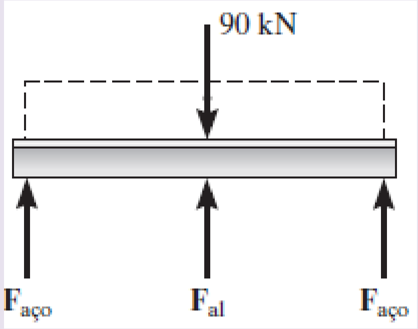
Do diagrama de corpo livre nós temos

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2F_{aço} + F_{al} - 90\left(10^3\right) = 0 \quad (1)$$



A parte superior de cada poste sofre o mesmo deslocamento. Em consequência,

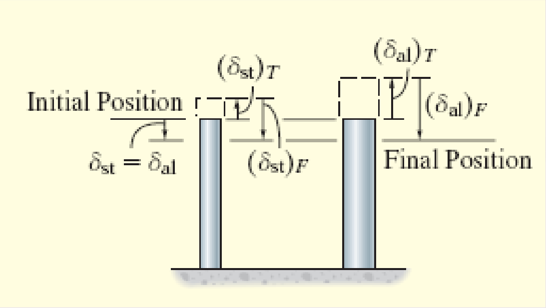
$$(+\downarrow) \quad \delta_{aço} = \delta_{al} \quad (2)$$



A posição final da parte superior de cada poste é igual ao deslocamento causado pelo aumento da temperatura e a força de compressão axial interna.

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{\text{aço}} = -\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{aço}}\right)_F$$

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{\text{al}} = -\left(\delta_{\text{al}}\right)_T + \left(\delta_{\text{al}}\right)_F$$



Aplicando a equação 2, temos

$$-\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{aço}}\right)_F = -\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{al}}\right)_F$$

Com referência às propriedades dos materiais, temos

$$-\left[12\left(10^{-6}\right)\right](80-20)(0,25) + \frac{F_{\text{aço}}(0,25)}{\pi(0,02)^2\left[200\left(10^9\right)\right]} = -\left[23\left(10^{-6}\right)\right](80-20)(0,25) + \frac{F_{\text{al}}(0,25)}{\pi(0,03)^2\left[73,1\left(10^9\right)\right]}$$

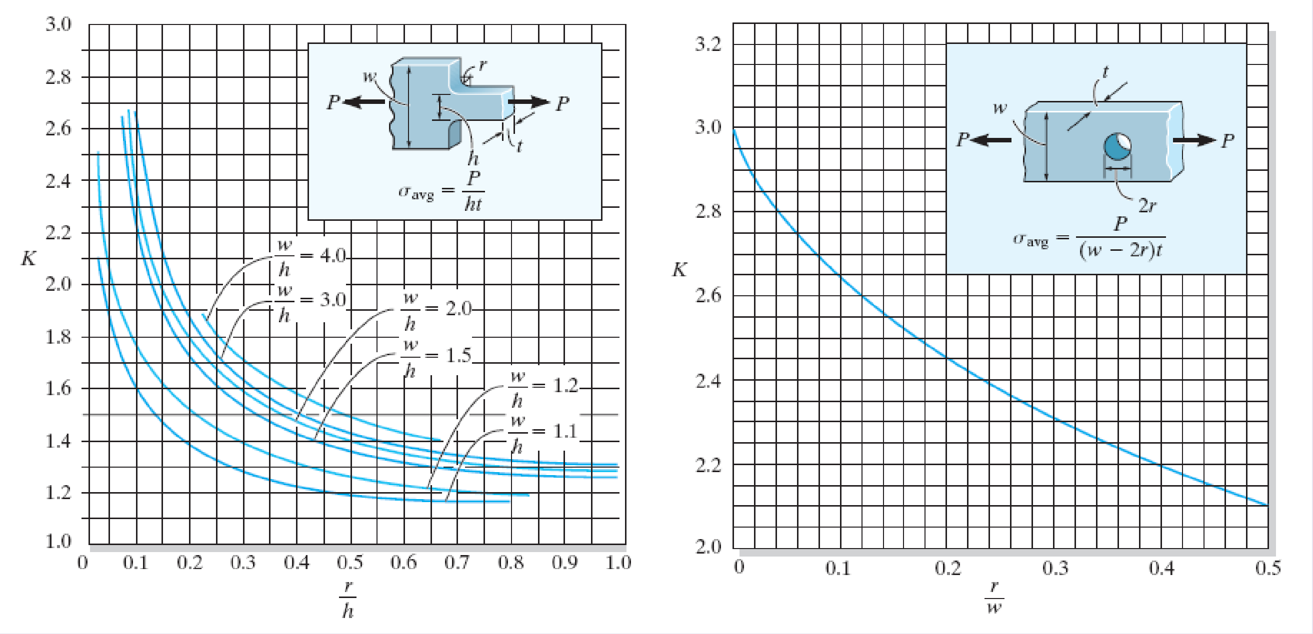
$$F_{\text{aço}} = 1,216F_{\text{al}} - 165,9\left(10^3\right) \qquad (3)$$

Resolvendo equações 1 e 3 simultâneamente, $F_{\text{aço}} = -16,4\text{ kN}$ e $F_{\text{al}} = 123\text{ kN}$ (Resposta)

Concentrações de tensão

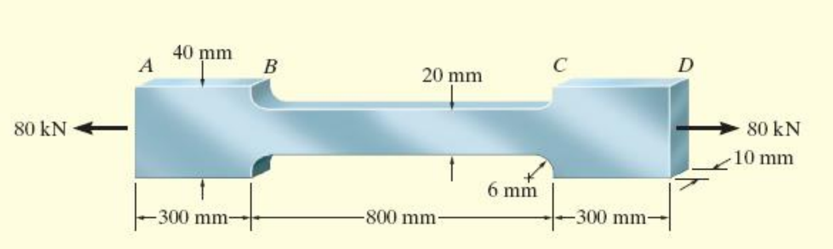
- *Concentrações de tensão* ocorrem em seções onde a área da seção transversal muda repentinamente.
- Tensão máxima é determinada usando uma *fator de concentração de tensão*, *K*, o qual é uma função de geometria.

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}}$$



Exemplo 4.14

A tira de aço está sujeita a uma carga axial de 80 kN. Determine a tensão normal máxima desenvolvida na tira e o deslocamento de uma de suas extremidades em relação à outra. A tensão de escoamento do aço é de σ_e = 700 MPa e $E_{aço}$ = 200 GPa.



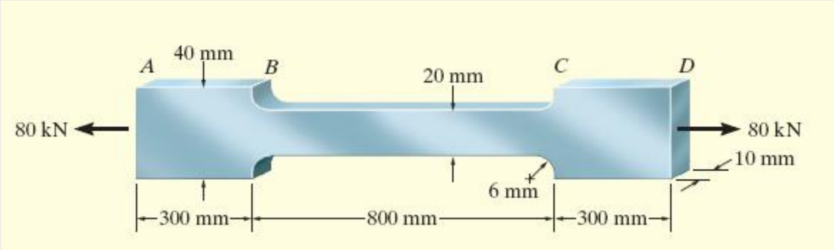
Solução:

A tensão normal máxima ocorre na menor seção transversal (*B*-*C*),

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{20} = 0{,}3, \qquad \frac{w}{h} = \frac{40}{20} = 2$$

Usando a tabela de geometria, nós temos *K* = 1,6. Portanto, a tensão máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} = K\frac{P}{A} = 1{,}6\left[\frac{80(10^3)}{(0{,}02)(0{,}01)}\right] = 640\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



Desprezando as deformações localizadas ao redor da carga aplicada e na mudança repentina na seção transversal no filete de rebaixo (princípio de Saint-Venant's), temos

$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = 2\left\{\frac{80\left(10^3\right)(0,3)}{(0,04)(0,01)\left[200\left(10^9\right)\right]}\right\} + \left\{\frac{80\left(10^3\right)(0,8)}{(0,02)(0,01)\left[200\left(10^9\right)\right]}\right\}$$

$$= 2,20\,\text{mm} \quad \text{(Resposta)}$$