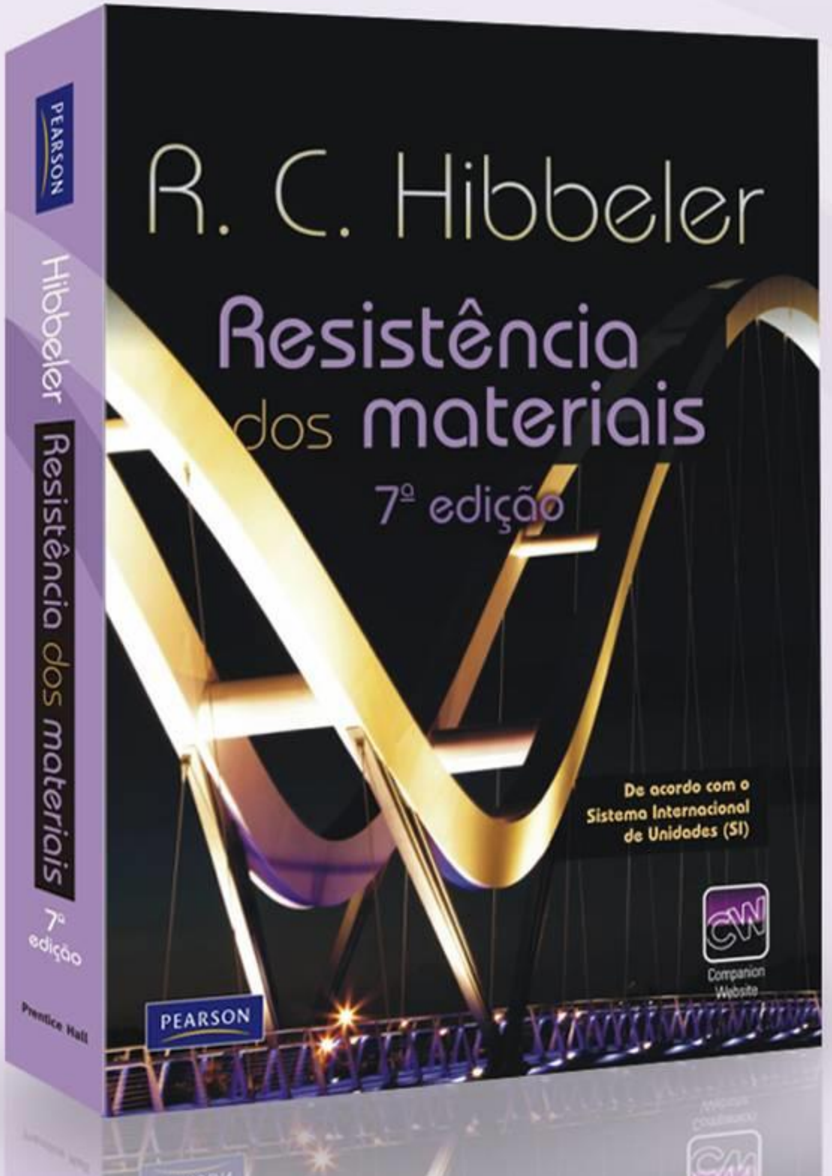
Capítulo 1

Tensão



Introdução

- A resistência dos materiais é um ramo da mecânica que estuda as relações entre as **cargas externas** aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das **cargas internas** que agem no interior do corpo.

- Esse assunto também envolve o cálculo das **deformações** do corpo e proporciona o estudo de sua **estabilidade** quando sujeito a forças externas.

Equilíbrio de um corpo deformável

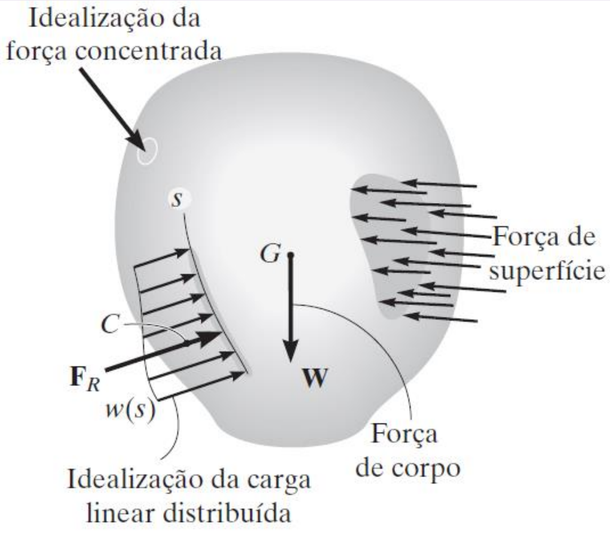
Cargas externas

1. Forças de superfície:

   causadas pelo contato direto de um corpo com a superfície de outro.

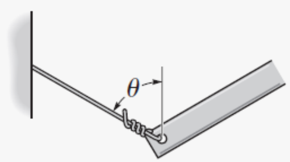
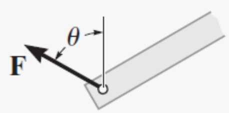
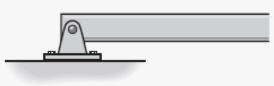
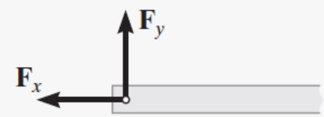
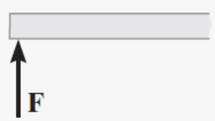
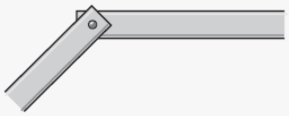
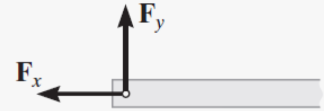
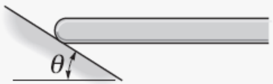
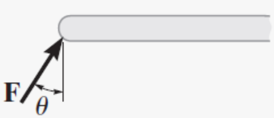
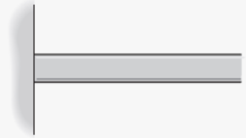
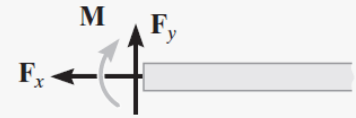
2. Força de corpo:

   Desenvolvida quando um corpo exerce uma força sobre outro, sem contato físico direto entre eles.



Reações

- Forças de superfície desenvolvidas nos apoios ou pontos de contato entre corpos.

Tipo de acoplamento	Reação	Tipo de acoplamento	Reação
 Cabo	 Uma incógnita: F	 Pino externo	 Duas incógnitas: F_x, F_y
 Rolete	 Uma incógnita: F	 Pino interno	 Duas incógnitas F_x, F_y
 Apoio liso	 Uma incógnita: F	 Apoio fixo	 Três incógnitas: F_x, F_y, M

Equações de equilíbrio

- O equilíbrio de um corpo exige um ***equilíbrio de forças*** e um ***equilíbrio de momentos***.

$$\sum \mathrm{F} = 0 \qquad \sum \mathrm{M}_O = 0$$

- Se estipularmos um sistema de coordenadas *x*, *y*, *z* com origem no ponto *O*,

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

- ***A melhor maneira de levar em conta essas forças é desenhar o diagrama de corpo livre do corpo.***

Cargas resultantes internas

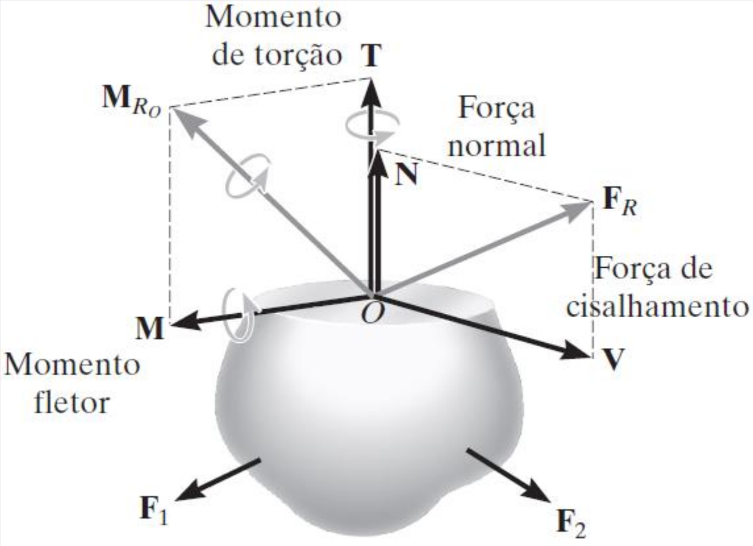
- O objetivo do diagrama de corpo livre é determinar a força e o momento resultantes que agem no interior de um corpo.
- Em geral, há quatro tipos diferentes de cargas resultantes:

a) Força normal, N

b) Força de cisalhamento, V

c) Momento de torção ou torque, T

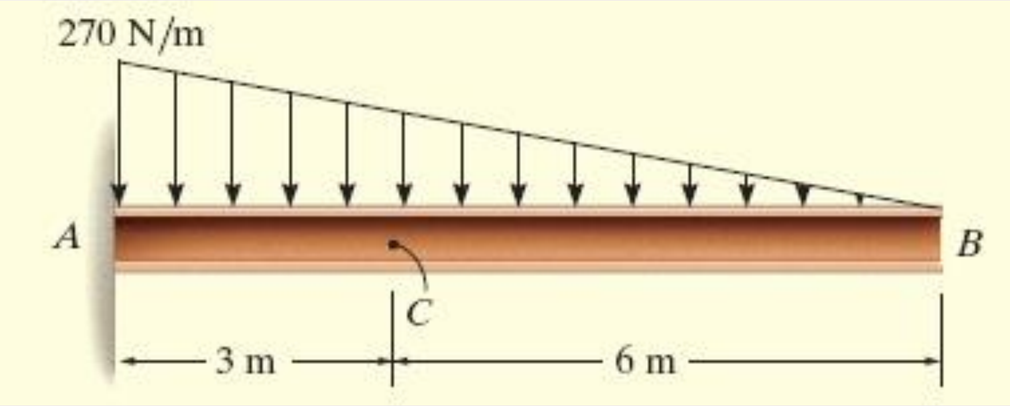
d) Momento fletor, M



(d)

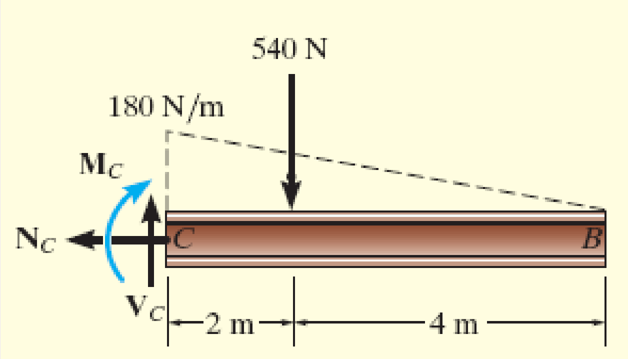
Exemplo 1.1

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *C*.



Solução:

Diagrama de corpo livre



A intensidade da carga distribuída em *C* é determinada por proporção,

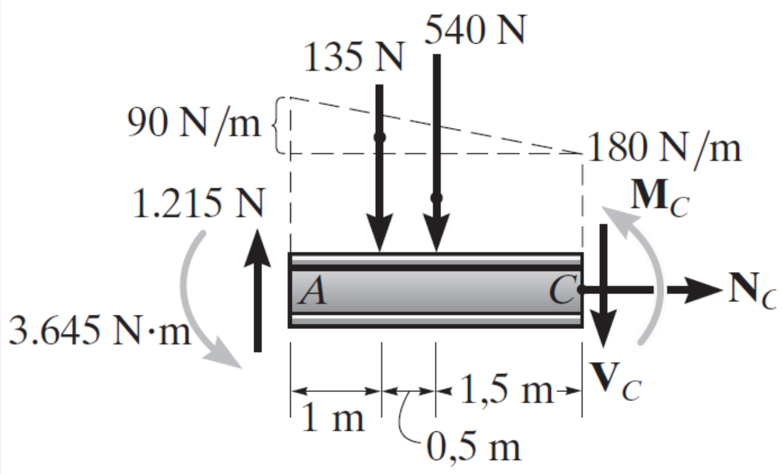
$$\frac{w}{6} = \frac{270}{9} \Rightarrow w = 180\,\text{N/m}$$

O valor da resultante da carga distribuída é

$$F = \tfrac{1}{2}(180)(6) = 540\text{N}$$

que age a $\tfrac{1}{3}(6) = 2\text{m}$ de *C*.

Equações de equilíbrio



Aplicandoas equações de equilíbrio, temos

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \qquad -N_C = 0$$

$$N_C = 0 \text{ (Resposta)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad V_C - 540 = 0$$

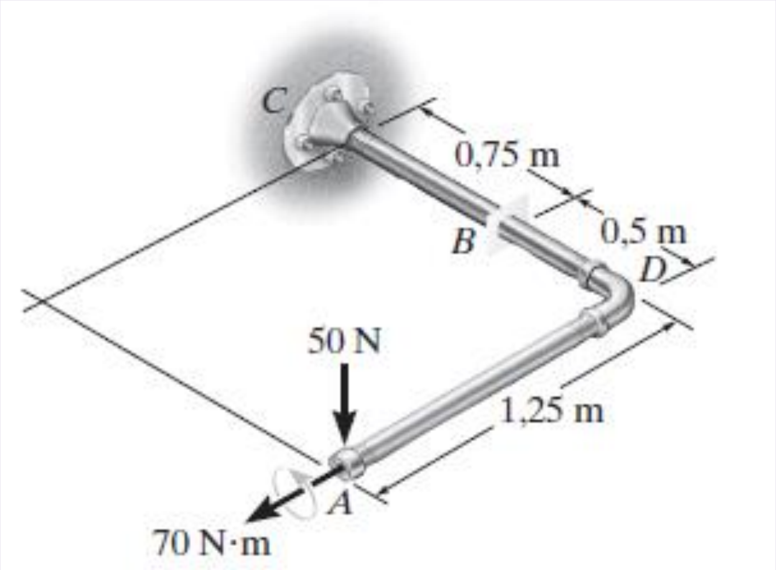
$$V_C = 540 \text{ (Resposta)}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0; \qquad -M_C - 540(2) = 0$$

$$M_C = -1.080 \text{ N} \cdot \text{m (Resposta)}$$

Exemplo 1.5

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *B* do cano. A massa do cano é de 2 kg/m e ele está sujeito a uma força vertical de 50 N e a um momento de 70 N·m em sua extremidade ao final de *A*. O tubo está preso a uma parede em *C*.



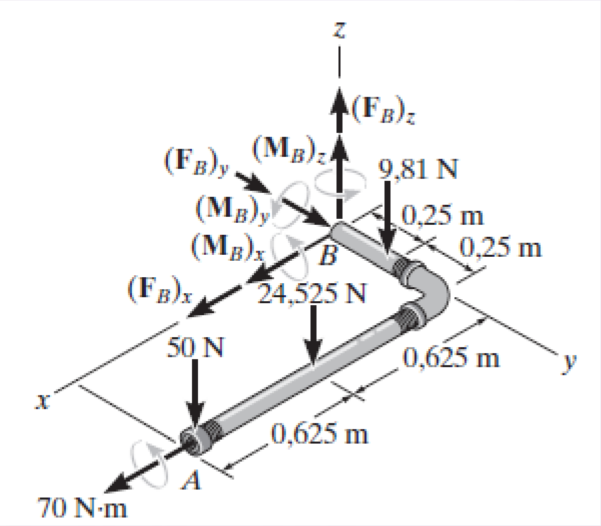
Solução:

Calculando o peso de cada segmento do tubo,

$$W_{BD} = (2)(0,5)(9,81) = 9,81\,\text{N}$$

$$W_{AD} = (2)(1,25)(9,81) = 24,525\,\text{N}$$

Diagrama corpo livre



Aplicando as seis equações escalares de equilíbrio,

$$\sum F_x = 0; \qquad (F_B)_x = 0 \ \text{(Resposta)}$$

$$\sum F_y = 0; \qquad (F_B)_y = 0 \ \text{(Resposta)}$$

$$\sum F_z = 0; \qquad (F_B)_z - 9,81 - 24,525 - 50 = 0$$

$$(F_B)_x = 84,3\,\text{N} \ \text{(Resposta)}$$

$$\sum (M_B)_x = 0; \quad (M_B)_x + 70 - 50(0,5) - 24,525(0,5) - 9,81(0,25) = 0$$

$$(M_B)_x = -30,3\text{N}\cdot\text{m} \ \text{(Resposta)}$$

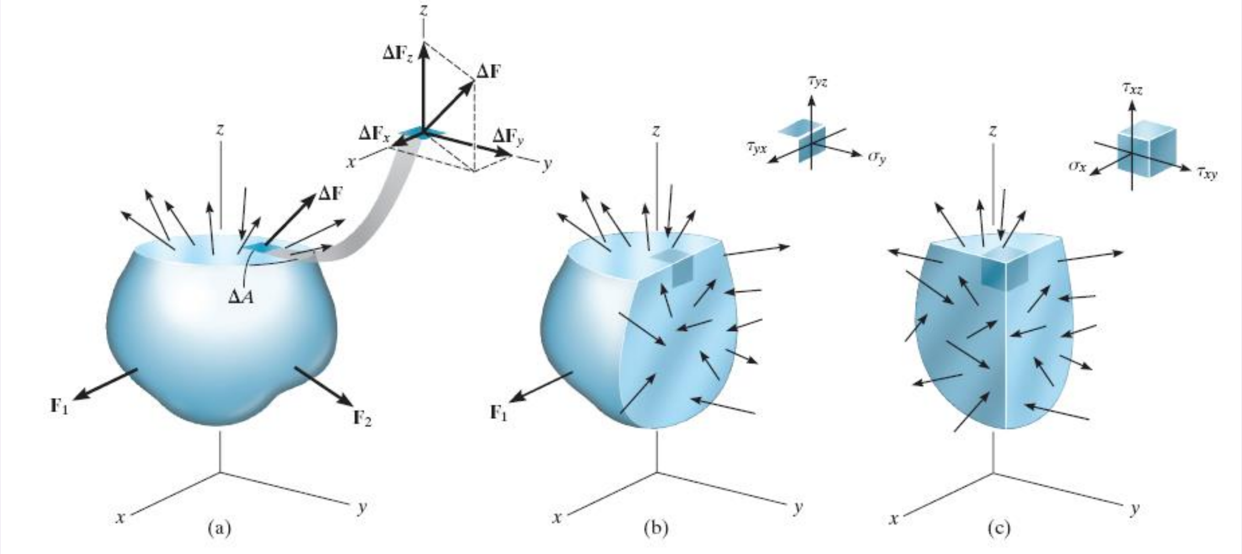
$$\sum (M_B)_y = 0; \quad (M_B)_y + 24,525(0,625) + 50(1,25) = 0$$

$$(M_B)_y = -77,8\text{N}\cdot\text{m} \ \text{(Resposta)}$$

$$\sum (M_B)_z = 0; \quad (M_B)_z = 0 \ \text{(Resposta)}$$

Tensão

- A ***distribuição*** de carga interna é importante na resistência dos materiais.
- Consideraremos que o material é ***contínuo***.
- A ***tensão*** descreve a *intensidade da força interna* sobre um *plano específico* (área) que passa por um ponto.



Tensão normal, σ

- Intensidade da força que age perpendicularmente à Δ*A*

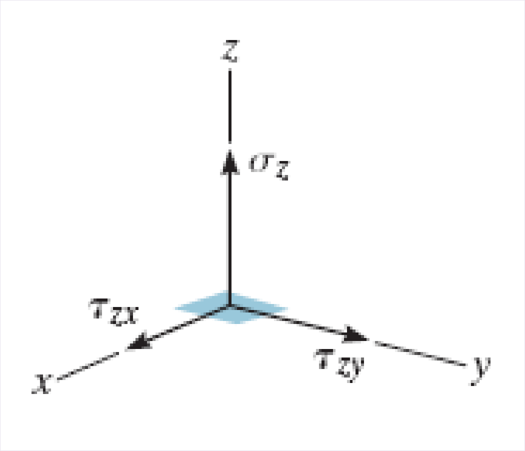
$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

Tensão de cisalhamento, τ

- Intensidade da força que age tangente à Δ*A*

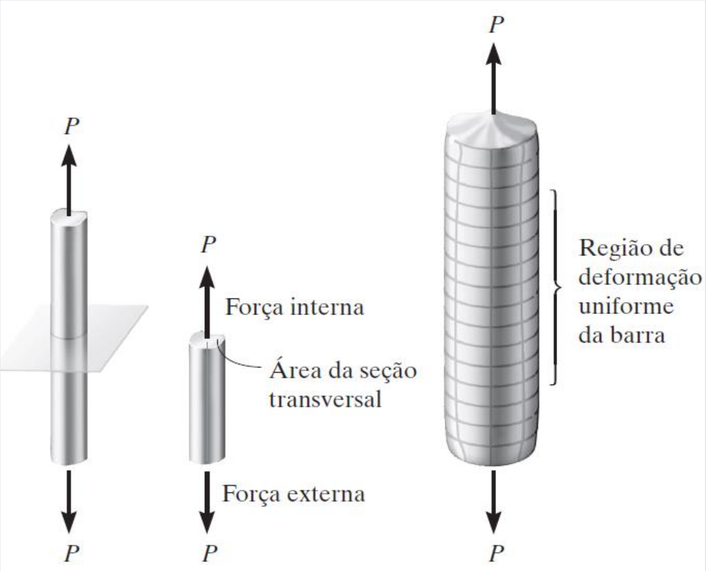
$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

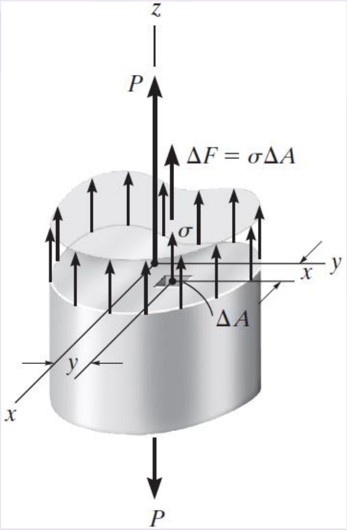


Tensão normal média em uma barra com carga axial

- Quando ***a área da seção transversal da barra*** está submetida à força axial pelo centroide, ela está submetida somente à tensão nominal.
- Supõe-se que a tensão está acima da média da área.



Distribuição da tensão normal média



- Quando a barra é submetida a uma deformação uniforme,

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

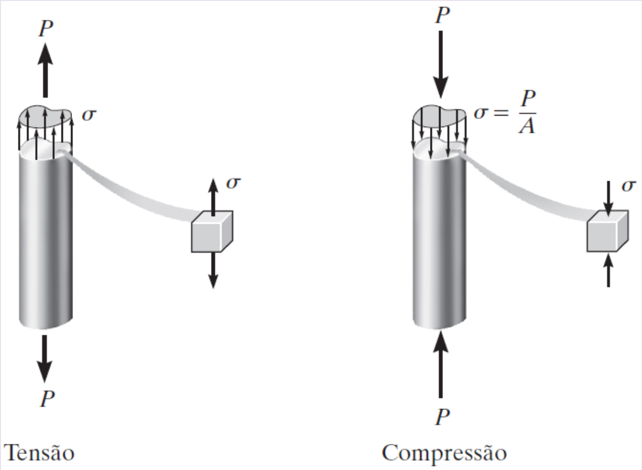
$$P = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

σ = tensão normal média
P = força normal interna resultante
A = área da seção transversal da barra

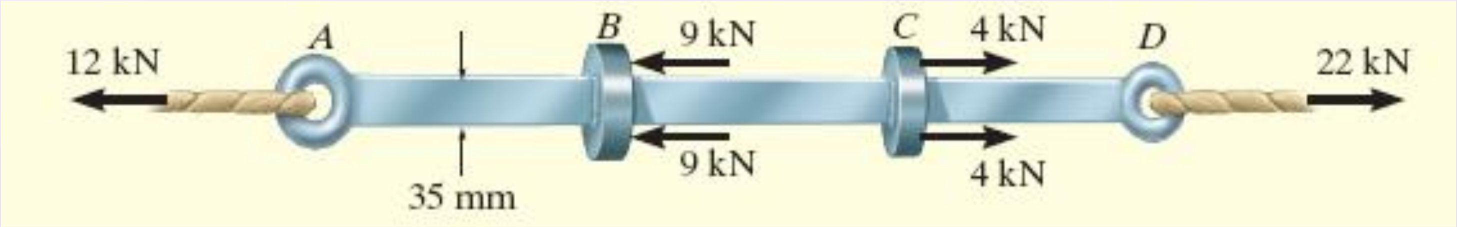
Equilíbrio

- As duas componentes da tensão normal no elemento têm valores iguais mas direções opostas.



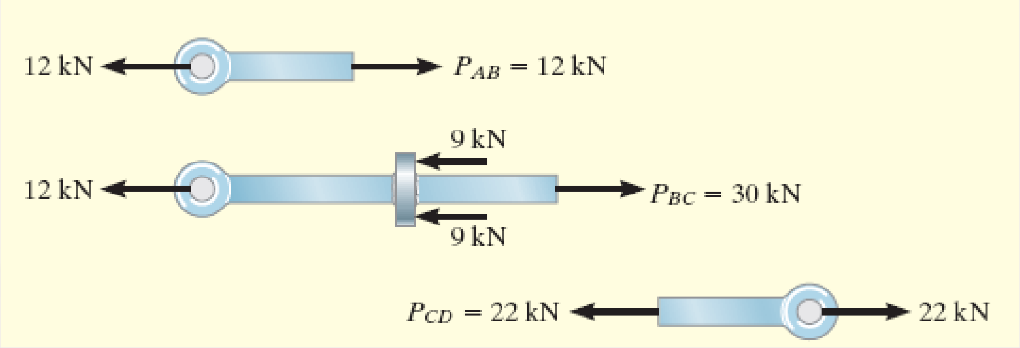
Exemplo 1.6

A barra tem largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determine a tensão normal média máxima na barra quando ela é submetida à carga mostrada.

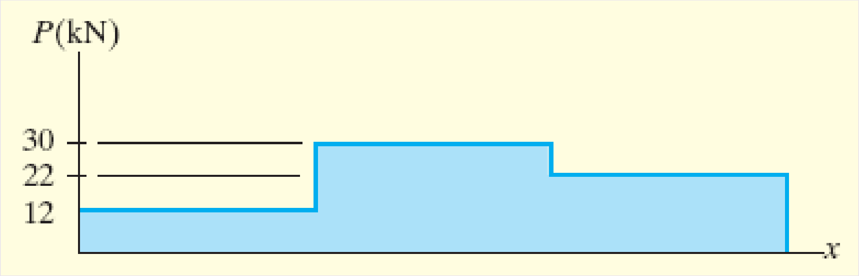


Solução:

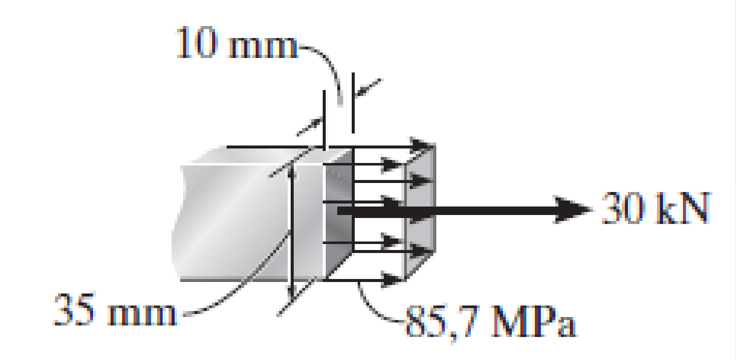
Por inspeção, as forças internas axiais são constantes, mas têm valores diferentes.



Graficamente, o diagrama da força normal é como mostrado abaixo:



Por inspeção, a maior carga é na região *BC*, onde $P_{BC} = 30\,\mathrm{kN}$.

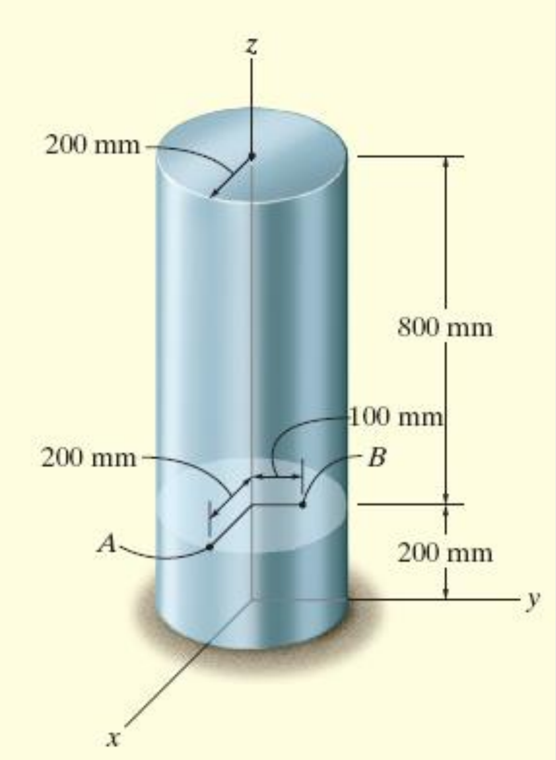


Visto que a área da seção transversal da barra é *constante*, a maior tensão normal média é

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30\left(10^3\right)}{(0{,}035)(0{,}01)} = 85{,}7\ \mathrm{MPa}\ (\text{Resposta})$$

Exemplo 1.8

A peça fundida mostrada é feita de aço, cujo peso específico é $\gamma_{aço} = 80\,kN/m^3$. Determine a tensão de compressão média que age nos pontos *A* e *B.*



Solução:

Desenhandoum diagrama de corpo livre do segmento superior, a força axial interna *P* nesta seção é

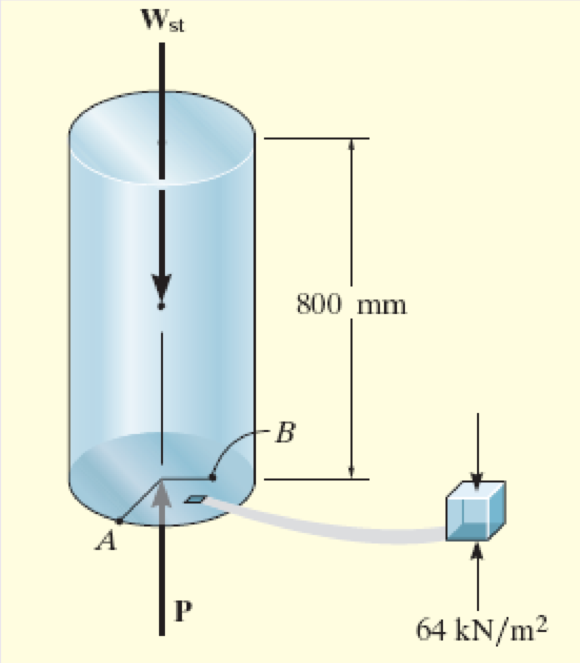
$$+\uparrow \sum F_z = 0; \qquad P - W_{\text{aço}} = 0$$

$$P - (80)(0{,}8)\pi(0{,}2)^2 = 0$$

$$P = 8{,}042\,\text{kN}$$

A tensão de compreensão média torna-se:

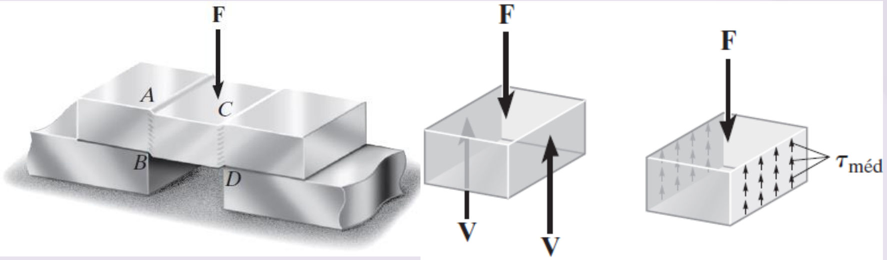
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8{,}042}{\pi(0{,}2)^2} = 64{,}0\ \text{kN/m}^2 \quad \text{(Resposta)}$$



Tensão de cisalhamento média

- A ***tensão de cisalhamento*** distribuída sobre cada área secionada que desenvolve essa força de cisalhamento é definida por:

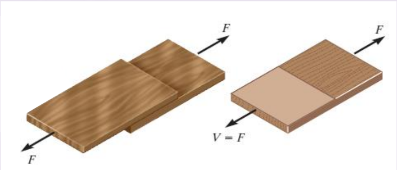
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{V}{A}$$



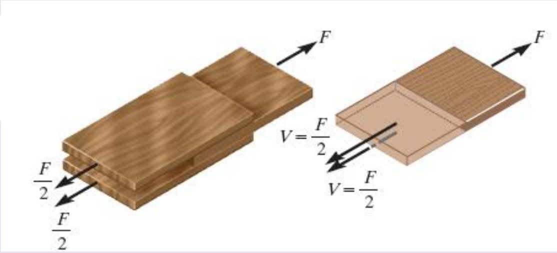
$\tau_{\text{méd}}$ = tensão de cisalhamento média
V = força de cisalhamento interna resultante
A = área na seção

Dois tipos diferentes de cisalhamento:

a) Cisalhamento simples

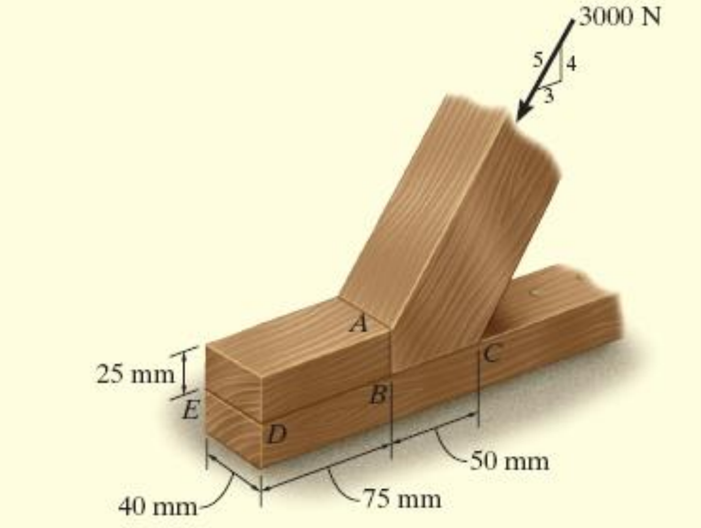


b) Cisalhamento duplo



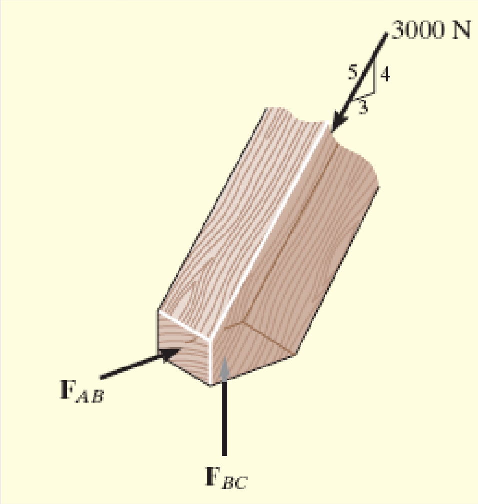
Exemplo 1.12

O elemento inclinado está submetido a uma força de compressão de 3.000 N. Determine a tensão de compressão média ao longo das áreas de contato lisas definidas por *AB* e *BC* e a tensão de cisalhamento média ao longo do plano horizontal definido por *EDB*.



Solução:

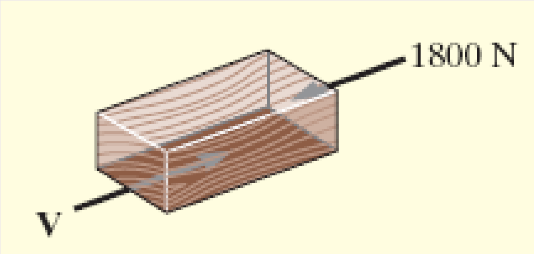
As forças de compressão agindo nas áreas de contato são



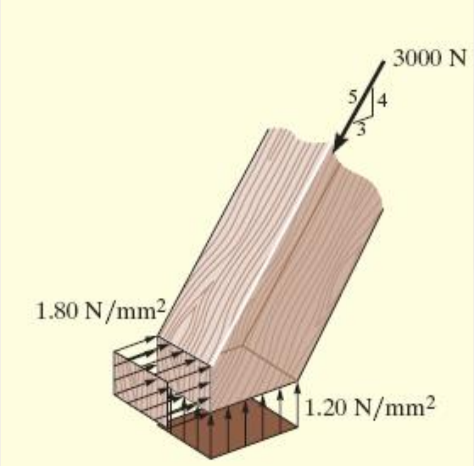
$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{AB} - 3.000\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1.800\,\text{N}$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} - 3.000\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow F_{BC} = 2.400\,\text{N}$$

A força de cisalhamento agindo no plano horizontal secionado *EDB* é

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad V = 1.800\,\text{N}$$



As tensões de compressão médias ao longo dos planos horizontal e vertical do elemento inclinado são

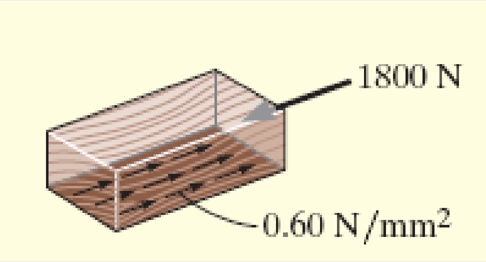


$$\sigma_{AB} = \frac{1.800}{(25)(40)} = 1{,}80\ \mathrm{N/mm^2} \quad \text{(Resposta)}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{2.400}{(50)(40)} = 1{,}20\ \mathrm{N/mm^2} \quad \text{(Resposta)}$$

A tensão de cisalhamento média que age no plano horizontal definido por BD é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{1.800}{(75)(40)} = 0{,}60\ \mathrm{N/mm^2} \quad \text{(Resposta)}$$



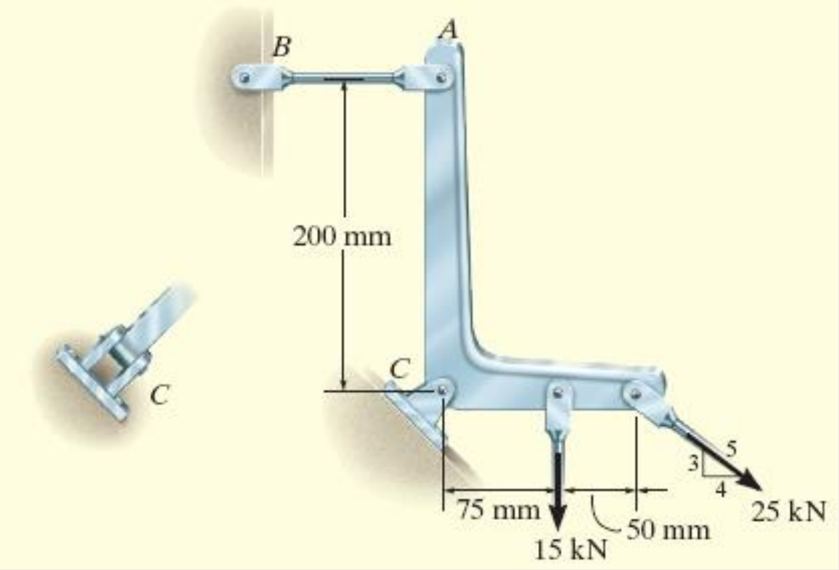
Tensão admissível

- Muitos fatores desconhecidos que influenciam na tensão real de um elemento.
- O *fator de segurança* é um método para especificação da carga admissível para o projeto ou análise de um elemento.
- O ***fator de segurança*** (FS) é a razão entre a carga de ruptura e a carga admissível.

$$\mathrm{FS} = \frac{F_{\mathrm{rup}}}{F_{\mathrm{adm}}}$$

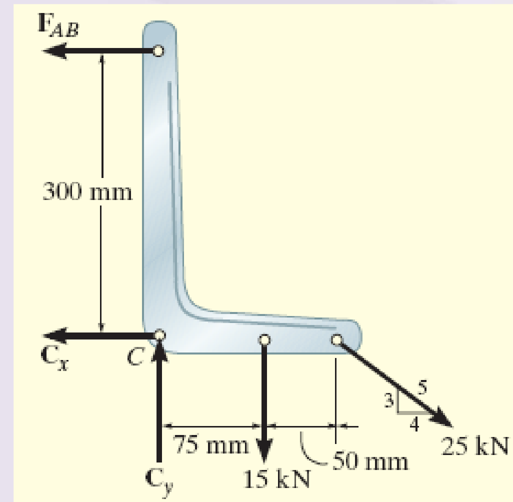
Exemplo 1.14

O braço de controle está submetido ao carregamento mostrado na figura abaixo. Determine, com aproximação de 5 mm, o diâmetro exigido para o pino de aço em *C* se a tensão de cisalhamento admissível para o aço for $\tau_{\text{adm}} = 55\,\text{MPa}$.
Note na figura que o pino está sujeito a cisalhamento duplo.



Solução:

Para equilíbrio, temos:

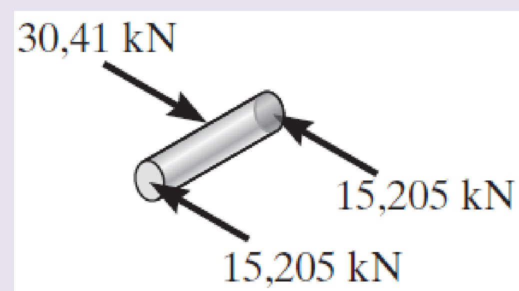


$$\curvearrowleft + \sum M_C = 0; \quad F_{AB}(0{,}2) = 15(0{,}075) - 25\left(\tfrac{3}{5}\right)(0{,}125) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 15\,\text{kN}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad -15 - C_x + 25\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow C_x = 5\,\text{kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \quad C_y - 15 - 25\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow C_y = 30\,\text{kN}$$

O pino em *C* resiste à força resultante em *C*. Portanto,



Pino em *C*

$$F_C = \sqrt{(5)^2 - (30)^2} = 30{,}41\,\text{kN}$$

O pino está sujeito a cisalhamento duplo, uma força de cisalhamento de 15,205 kN age sobre sua área da seção transversal *entre* o braço e cada orelha de apoio do pino.

A área exigida é

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{15{,}205}{55\times 10^{3}} = 276{,}45\times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

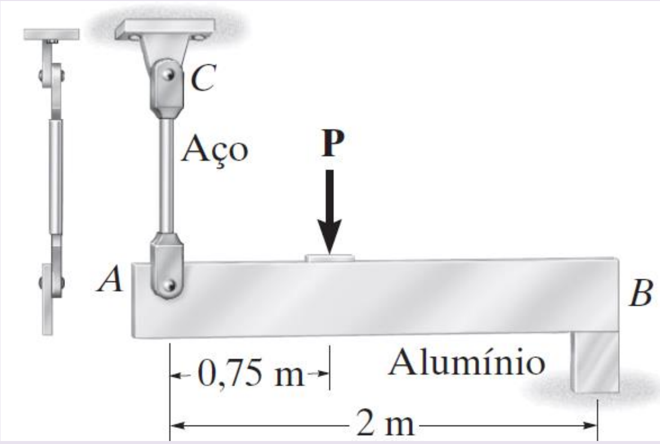
$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 246{,}45\,\text{mm}^2$$

$$d = 18{,}8\,\text{mm}$$

Use um pino com um diâmetro *d* = 20 mm. (Resposta)

Exemplo 1.17

A barra rígida *AB* é sustentada por uma haste de aço *AC* com 20 mm de diâmetro e um bloco de alumínio com área de seção transversal de 1.800 mm^2. Os pinos de 18 mm de diâmetro em *A* e *C* estão submetidos a *cisalhamento simples*. Se a tensão de ruptura do aço e do alumínio forem $(\sigma_{\text{aço}})_{\text{rup}} = 680\,\text{MPa}$ e $(\sigma_{\text{al}})_{\text{rup}} = 70\,\text{MPa}$, respectivamente, e a tensão falha para cada pino for de $\tau_{\text{rup}} = 900\,\text{MPa}$, determine a maior carga *P* que pode ser aplicada à barra. Aplique um fator de segurança FS = 2.



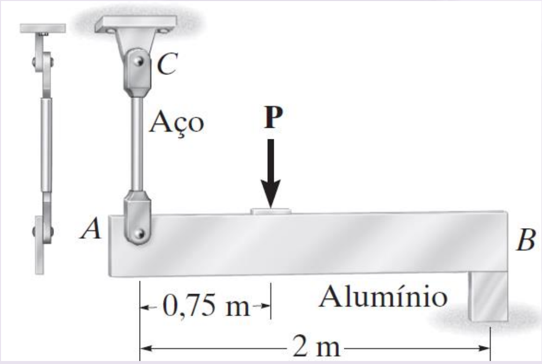
Solução:

As tenções admissíveis são:

$$(\sigma_{\text{aço}})_{\text{adm}} = \frac{(\sigma_{\text{aço}})_{\text{rup}}}{\text{FS}} = \frac{680}{2} = 340\,\text{MPa}$$

$$(\sigma_{\text{al}})_{\text{adm}} = \frac{(\sigma_{\text{al}})_{\text{rup}}}{\text{FS}} = \frac{70}{2} = 35\,\text{MPa}$$

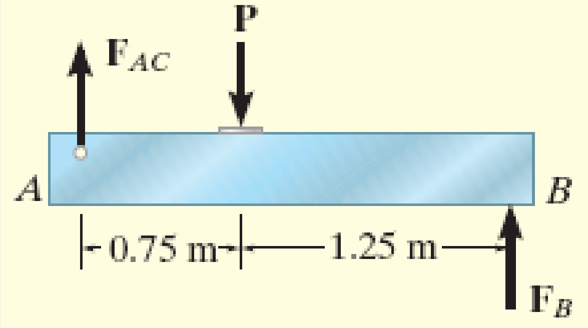
$$\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_{\text{rup}}}{\text{FS}} = \frac{900}{2} = 450\,\text{MPa}$$



Há três incógnitas e nós aplicaremos as equações de equilíbrio

$$\curvearrowleft + \sum M_B = 0; \quad P(1{,}25) - F_{AC}(2) = 0 \qquad (1)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0; \quad F_B(2) - P(0{,}75) = 0 \qquad (2)$$



Agora, determinaremos cada valor de *P* que crie a tensão admissível na haste, no bloco e nos pinos, respectivamente.

A haste *AC* exige $F_{AC} = (\sigma_{\text{aço}})_{\text{adm}}(A_{AC}) = 340(10^6)[\pi(0{,}01)^2] = 106{,}8\ \text{kN}$

Usando a Equação 1, $P = \dfrac{(106{,}8)(2)}{1{,}25} = 171\ \text{kN}$

Para bloco *B*, $F_B = (\sigma_{\text{al}})_{\text{adm}} A_B = 35(10^6)[1.800(10^{-6})] = 63{,}0\ \text{kN}$

Usando a Equação 2, $P = \dfrac{(63{,}0)(2)}{0{,}75} = 168\ \text{kN}$

Para o pino *A* ou *C*, $V = F_{AC} = \tau_{\text{adm}} A = 450\left(10^6\right)\left[\pi\left(0{,}009\right)^2\right] = 114{,}5\ \text{kN}$

Usando a Equação 1, $P = \dfrac{(114{,}5)(2)}{1{,}25} = 183\ \text{kN}$

Quando *P* alcança seu *menor valor* (168 kN), desenvolve a tensão normal admissível no bloco de alumínio. Por consequência,

$$P = 168\ \text{kN (Resposta)}$$